משחקים במספרים

1. פתרו את המשוואות הבאות בטבעיים:
   א. $x^2 - y! = 2001$.
   ב. $x^5 = y^2 + 4$.
   ג. $2^x + 3 = 11^y$
2. הוכיחו שעבור כל n טבעי אפשר למצוא n מספרים עוקבים, כך שאף אחד מהם אינו חזקת ראשוני.
3. הוכיחו שיש אינסוף n טבעיים כך שהראשוני הכי גדול שמחלק את $n^4 + n^2 + 1$ שווה לראשוני הכי גדול שמחלק את $(n+1)^4 + (n+1)^2 + 1$.
4. נגדיר סדרת מספרים לפי התנאים $a_1 = 1$ ו- $a_{n+1} = a_n + 2^{a_n}$. הוכיחו שהמספרים $a_1, a_2, ..., a_{3^{2020}}$ כולם שונים מודולו 3^{2020}.
5. נתונות שתי ערימות של אבנים. בתחלית המשחק בערימה הראשונה M אבנים ובשנייה N. בכל מהלך, אחד השחקנים מוציא מהערימה הגדולה יותר מספר אבנים שמתחלק בגודל הערימה הקטנה יותר. דורבן ופנדה משחקים בתורות לסירוגין, הלוטרה שמחסלת את אחת הערימות, מנצחת, דורבן מתחיל.
   א. הוכיחו שאם $M > 2N$ אז דורבן מנצח.
   ב. עבור כל המקרים האחרים, לאיזה שחקן יש אסטרטגיה מנצחת?
6. דורבן ופנדה משחקים משחק. על השולחן מונחות n אבנים. דורבן מתחיל ולוקח כמות כלשהי של אבנים אך לא את כולם. אחרי התור הראשון הם לוקחים אבנים לסירוגין, כך שאם השחקן הקודם לקח k אבנים, השחקן הנוכחי יכול לקחת כל מספר של אבנים בין 1 ל- $2k-1$ (כולל). מנצחת הלוטרה שלוקחת את האבן האחרונה.
   א. עבור אילו ערכי n דורבן ינצח?
   ב. אותו דבר רק שהתחום הוא בין 1 ל- $2k$.