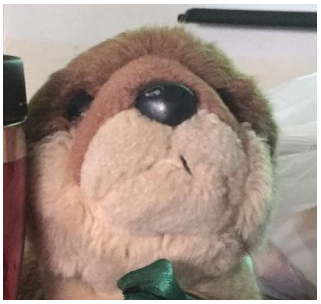
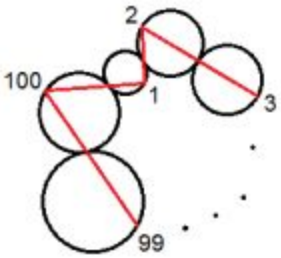


הדורבן, הגיאומטריה, וארון המספרים

1. הוכיחו שיש בדיוק מספר אחד עם 2525 ספרות, שכולן הן 2 או 5 כך שהוא מתחלק ב- 2^{2525}.



2. א.נתונים 100 מעגלים שמשיקים זה לזה באופן חיצוני במחרוזת (גם המעגל ה- 100 משיק למעגל הראשון). מתחילים מנקודה על המעגל הראשון ועוברים מנקודה לנקודה על המעגל הבא שהיא נקודת חיתוך שנייה של מיתר שמחבר מספר N ונקודת ההשקה של מעגל $N, N+1$, ולוקחים את נקודת החיתוך השנייה עם המעגל ה- $N+1$. הוכיחו שנקודה מספר 101 מתלכדת עם נקודה 1.
ב. מה קורה למספר אי-זוגי של מעגלים ?

3. הוכיחו שכל שבר $\frac{a}{b}$ אפשר לרשום כשבר מצרי, כלומר כסכום שברים מהצורה $\frac{1}{n}$ שכולם שונים.

4.תהיינה A, B, C, D ארבע נקודות על ישר אחד, בסדר זה. המעגלים עם הקטרים AC, BD נחתכים ב- X, Y. הישר XY חותך את BC ב- Z. תהא P נקודה על ישר XY שאינה Z. הישר CP חותך את המעגל שקוטרו AC בנקודות C ו- M. הישר BP חותך את המעגל שקוטרו BD בנקודות B ו- N. הוכיחו כי הישרים XY, AM, DN נחתכים בנקודה אחת.

5. מצאו את כל הפתרונות למשוואה $x^2 + 2y^2 = z^2$ במספרים שלמים.

6. נקודה שלמה זו נקודה ששתי הקורדינטות שלה הן שלמות. במישור נתון ריבוע $n \times n$ שקודקודיו לא בהכרח נקודות שלמות, וצלעותיו לא בהכרח מקבילות לצירים. הוכיחו שהריבוע מכסה לכל היותר $(n+1)^2$ נקודות שלמות.

7. יהא משולש ABC ובו הזווית $\angle C$ ישרה, יהא D עקב הגובה מ C. תהא X נקודה על הקטע הפתוח CD. תהא K הנקודה על הקטע AX, עבורה $BC = BK$. באופן דומה, תהא L הנקודה על הקטע BX עבורה $AC = AL$. תהא M נקודת החיתוך של AL ו- BK. הוכיחו כי $ML = MK$.

8. א. הוכיחו כי לכל ראשוני p קיים ראשוני q כך שלכל n שלם המספר $n^p - p$ אינו מתחלק ב- q.
ב. הוכיחו שיש אינסוף כאלה.