זהויות

1. א. הראו כי $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$.

ב. מצאו זהות דומה: $1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}+\ldots+\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}-\frac{2}{3n}=?$.

2. חשבו ללא מחשבון את הביטויים הבאים

א. $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$.

ב. $\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{81}}$.

3. צמצמו את השבר: $\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{100^3-1}{100^3+1}$.

4. אילו מהמספרים מבין

$$A=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^3\quad,\quad B=\sqrt{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{7}\right)^{2005}}+\sqrt{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{7}\right)^{2005}},$$

$$C=\frac{1}{6\sqrt{2}-2\sqrt{15}}+\frac{1}{6\sqrt{2}+2\sqrt{15}}\quad,\quad D=\sqrt{1003+\sqrt{2005}}-\sqrt{1003-\sqrt{2005}}$$

שווים זה לזה?

5. מה יותר גדול: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}$ או $\frac{1}{10}$?

6. מצאו ביטויים קצרים לסכומים:

א. $\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)}$. ב. $\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. ג. $\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k!+(k+1)!}$.

7. הוכח כי $\frac{2003}{2}-\frac{2002}{3}+\frac{2001}{4}-\ldots-\frac{2}{2003}+\frac{1}{2004}=\frac{1}{1003}+\frac{3}{1004}+\ldots+\frac{2003}{2004}$.

8. מה יותר גדול $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4+\sqrt{5+\sqrt{\ldots+\sqrt{100}}}}}}$ או 3?

9. מיין את המספרים A, B, C לפי הגודל

$$A=2$$

$$B=\frac{8000}{7999}\cdot\frac{7997}{7996}\cdot\frac{7994}{7993}\cdot\ldots\cdot\frac{1001}{1000}$$

$$C=\sqrt[3]{\sqrt{576}-\sqrt{575}+\sqrt{573}-\sqrt{572}+\sqrt{570}-\sqrt{569}+\ldots+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

10. הוכיחו כי $\sum_{cyc}\frac{\left(a^2+bc\right)\left(b^2+ac\right)}{(a+c)(b+c)}=a^2+b^2+c^2$.