פולינומים סימטריים

הפולינומים הסימטריים האלמנטריים:

$e_0 = 1, e_1 = \sum_i x_i\,, e_2 = \sum_{i<j} x_i x_j\,, e_3 = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k\,, \dots, e_n = x_1 x_2 \cdots x_n$

נוסחאות וייטה: (אם x_i שורשי הפולינום, אז $\pm e_i$ הם המקדמים)

$(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = x^n - e_1 x^{n-1} + e_2 x^{n-2} - \cdots \pm e_{n-1} x \mp e_n$

נוסחאות ניוטון: (להביע סכומי חזקות באמצעות e_i)

$$p_k = \sum_i x_i^k: \quad \begin{cases} 0 = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i-1} e_{k-i} p_i & k < n \\ 0 = \sum_{i=k-n}^{k} (-1)^{i-1} e_{k-i} p_i & k \geq n \end{cases}$$

המשפט היסודי: כל פולינום סימטרי ניתן להצגה כפולינום ב-e_i.

1. שורשי הפולינום $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ הם t, u, v, w. מצאו פולינום ששורשיו הם t^2, u^2, v^2, w^2.

2. פתרו את מערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} x + y + z = 11 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 49 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \end{cases}$

ב. $\begin{cases} x + y^3 + z^3 = 0 \\ x^3 + y + z^3 = 0 \\ x^3 + y^3 + z = 0 \end{cases}$

ג. $\begin{cases} (y + z)^3 = 6 - 7x \\ (z + x)^3 = 6 - 7y \\ (x + y)^3 = 6 - 7z \end{cases}$

3. נתונים שלושה מספרים a, b, c המקיימים $abc = 1$ וגם $a + b + c = ab + bc + ca$. הוכיחו שאחד מהמספרים שווה 1.

4. נתונים מספרים מרוכבים a, b, c, d המקיימים $a + b + c + d = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 0$. הוכיחו שסכומם של שניים מארבעת המספרים הוא 0.

5. מספר נקרא אלגברי אם הוא שורש של פולינום כלשהו במקדמים שלמים. הוכיחו שאם x, y אלגבריים, אז $x + y, x - y, xy, x/y$ אלגבריים (החילוק רק כאשר $y \neq 0$).

בתיאבון!