משפט השאריות הסיני

0. משפט שאריות הסיני:

נניח כי p,q מספרים טבעיים זרים, ונניח רוצים לפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{p} \\ x \equiv b \pmod{q} \end{cases}$$

אז קיים מספר שלם x המקיים אותן, והוא יחיד עד כדי הזזות ב-pq.

1. חשבו את שתי הספרות הימניות של $14^{14^{14}}$.

2. מצאו את כל המספרים השלמים n עבורם $\frac{n^2+3n+1}{55}$ שלם.

3. הראו כי המספרים הטבעיים עבורם K^K+1 מתחלק ב-210 מהווים סדרה חשבונית.

4. ישנו יער שבו יש עץ נקודתי בכל נקודה שלמה, צייד עומד בראשית הצירים ויכול לראות כל עץ שאינו מוסתר. הוכיחו שיש עיגול שרדיוסו 1000 שהצייד לא רואה בו אף עץ.

5. עבור אילו ערכי n קיימים מספרים טבעיים $b_1,b_2,...,b_n$ שלא כולם אותו דבר, עבורם המספר $(b_1+k)(b_2+k)\cdot...\cdot(b_n+k)$ יהיה חזקה של מספר שלם לכל k (צריך להיות מספר בחזקה שגדולה מ-1, אבל לא חייב להיות כל פעם באותה חזקה).

6. אוסף ישרים סופי במישור נקרא מושלם אם אף שני ישרים לא מקבילים, אף שלושה לא נפגשים בנקודה, והחיתוך של כל שני ישרים הוא בעל קואורדינטות שלמות. האם לכל אוסף מושלם, של שלושה ישרים או יותר, ניתן להוסיף עוד ישר כך שהאוסף יישאר מושלם?

7*. נקודה במישור נקראת פרימיטיבית אם שתי הקואורדינטות שלה מספרים שלמים וזרים. נתונה קבוצה סופית S של נקודות פרימיטיביות, הוכיחו שקיים פולינום הומוגני בשני משתנים ומקדמים שלמים $P(x,y)$, כך שלכל $(a,b)\in S$ מתקיים: $P(a,b)=1$

(פולינום הומוגני הוא פולינום מהצורה $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}y+...+a_0y^n$.)

8*. הוכיחו שקיים N טבעי, עבורו 100 הספרות הימניות של 2^N מכילות לפחות 50 פעמים את הספרה תשע.

בתאבון!