גרפים

כל הגרפים פשוטים ולא מכוונים, אלא אם נאמר אחרת

$\chi(G)$ הוא מספר הצביעה, $\overline{G}$ הוא הגרף המשלים

1. בגרף G לכל שני קודקודים יש מספר אי-זוגי של שכנים משותפים. הוכיחו ש-G מכיל מעגל אוילר.

2. נתון שבגרף G יש 2019 זיווגים בדיוק, וכמות זוגית של קודקודים. הוכיחו ש-$\overline{G}$ מכיל זיווג **מושלם**.
(זיווג הוא קבוצת קשתות זרות בקודקודים מגודל כלשהו. זיווג מושלם הוא זיווג העובר בכל הקודקודים)

3. בגרף קשיר, לכל קשת נתנו משקל חיובי שונה. איילה בחרה עץ פורש שבו סכום משקלי הקשתות מינימלי, מבין כל העצים הפורשים האפשריים. ברווז מצא עץ פורש שבו מכפלת המשקלים היא מינימלית. האם הם בהכרח בחרו את אותו העץ?

4. יהי G גרף בעל 100 קודקודים. מהו הערך המקסימלי והמינימלי האפשרי של $\chi(G) + \chi(\overline{G})$?

5. מצאו את המספר המקסימלי k בעל התכונה הבאה: יהי טורניר עם כמות זוגית של קודקודים שלא מכיל מעגל בגודל k. אזי ניתן לפרק את הקודקודים לשתי קבוצות, כך שכל אחת מכילה חצי מכמות הקודקודים, ובאף אחת מהן אין מעגל בגודל 3.

6. **א.** נתון גרף מכוון G. הוכיחו שכמויות מסלולי המילטון ב-G וב-$\overline{G}$ הן מאותה זוגיות.
ב. הוכיחו שבכל טורניר כמות מסלולי המילטון היא אי-זוגית.
ג. הוכיחו שבגרף 3-רגולרי (לא מכוון), כל קשת מוכלת בכמות זוגית של **מעגלי** המילטון.

7. נתון גרף שבו גודל הקליקה המקסימלית זוגי. הוכיחו שניתן לצבוע את הקודקודים בכחול ואדום, כך שגודל הקליקה הגדולה ביותר המורכבת מקודקודים אדומים יהיה שווה לגודל הקליקה הגדולה ביותר המורכבת מקודקודים כחולים.

8. בהינתן תת קבוצה X של קודקודים בגרף מכוון ומספר $k \geq 1$, נגדיר $N_k(X)$ להיות קבוצת הקודקודים שיש מהם הילוך באורך k אל אחד מקודקודי X. נגדיר גם $n(X)$ להיות כמות הקבוצות השונות ברשימה $N_1(X), N_2(X), N_3(X), \ldots$. הוכיחו שלכל m מספיק גדול, לכל גרף מכוון על m קודקודים ולכל קבוצה X של קודקודים, מתקיים $n(X) \leq 1.0001^m$.

בתיאבון!