

# תרגיל פולינומים אי פריקים

## תזכורת

1. קריטריון אייזנשטיין – אם  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$  פולינום כך ש  $p$  מחלק את כל המקדמים חוץ מהמוביל ו  $p^2 \nmid a_0$  אז  $f$  אי פריק
2. הלמה של גאוס – פולינום בשלמים פריק ב  $\mathbb{Q}$  אם"ם הוא פריק ב  $\mathbb{Z}$
3. יש  $gcd$  לפולינומים מתוקנים עם מקדמים שלמים והוא פולינום מתוקן עם מקדמים שלמים

## תרגילים

1. יהי  $f$  פולינום אי פריק, הוכח שאין לו שורשים כפולים.
2. הוכח שהפולינום  $x^4 + 6x^2 + 1$  פריק מודולו כל ראשוני, אבל לא פריק.
3. יהי  $p$  ראשוני, הוכח שהפולינום  $f = x^{p-1} + 2x^{p-2} + 3x^{p-3} + \dots + p$  אי פריק.
4. יהי  $f$  פולינום אי פריק מתוקן עם מקדמים שלמים, נניח כי  $|f(0)|$  לא ריבוע, הוכח ש  $f(x^2)$  אי פריק.
5. יהי  $f$  פולינום אי פריק עם מקדמים שלמים לא לינארי, נניח שיש ל  $f$  שני שורשים שמכפלתם 1, אז  $f$  ממעלה זוגית.
6. האם יש סדרה  $a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{Z}$  של מספרים זרים כך שלכל  $n$ , הפולינום  $\sum_{i=0}^n a_i x^i$  הוא אי פריק?
7. הוכח ש  $(x^2 + x)^{2^n} + 1$  אי פריק.