

## אינווריאנטים

1. הנסיך האגדי נלחם בדרקון בעל 100 ראשים. יש לו חרב ברזל קסומה וחרב פלדה מכושפת. מכה עם חרב הברזל הקסומה יכולה להוריד 91 ראשים (בדיוק). מכה עם חרב פלדה המכושפת יכולה להוריד 4 ראשים (בדיוק), אבל אז צומחים 5779 ראשים חדשים על הדרקון. האם הנסיך האגדי יכול להרוג את הדרקון?

2. על הלוח רשומים 108 מספרים  $1, 2, 3, \dots, 108$ . בכל שלב משה בוחר שני מספרים  $a$  ו- $b$ , מוחק אותם, ובמקומם כותב  $a+b-1$ . לאחר 107 שלבים נשאר על הלוח מספר אחד. מהו המספר?

3. נתונה שורה של  $n \geq 7$  משבצות. בשלושת המשבצות השמאליות ביותר עומדים חיילים לבנים; בשלושת המשבצות הימניות ביותר עומדים חיילים שחורים. השחקן הלבן והשחקן השחור משחקים בתורות; השחקן הלבן מתחיל. בכל מהלך מותר לכל שחקן לקחת חייל בצבע שלו ולהזיז אותו למשבצת סמוכה, כל עוד היא לא תפוסה על ידי חייל באותו הצבע. אם במשבצת שאליה הוא מזיז את החייל יש כבר חייל בצבע הנגדי, השחקן מוריד מהלוח את שני החיילים (החייל שלו והחייל של היריב). השחקן שמוריד את שני החיילים האחרונים מהלוח מנצח. למי יש אסטרטגיה מנצחת, ללבן או לשחור, ואיזו? (התשובה יכולה להיות תלויה ב- $n$ ).

4. בקודקודי המשושה רשומים מספרים 1, 2, 3, 6, 8, 10, 12 בסדר זה. מותר בכל מהלך או להוסיף 1 לשני מספרים סמוכים, או להחסיר 1 משני מספרים סמוכים לפי בחירתך. האם לאחר מספר מהלכים ניתן לעבור למצב שהמספרים במעגל יהיו 1, 10, 1, 10, 6, 6, 3 בסדר זה?

5. על הלוח כתובים המספרים 5, 6, 7, 8, 9. בכל שלב ושלב, בוחרים שני מספרים שרשומים על הלוח, קוראים להם  $a$  ו- $b$  ומחליפים אותם במספרים  $\frac{3a-4b}{5}$  ו- $\frac{4a+3b}{5}$ . האם ניתן לאחר

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

מספר פעולות להגיע למצב שהמספרים על הלוח יהיו 5, 7, 7, 7, 9?

6. על משבצות הלוח מונחות אבנים כפי שניתן שכתוב בטבלה. בכל מהלך מותר לבחור 3 משבצות ברצף באותה שורה או באותה עמודה, ולהוריד אבן משלושת המשבצות. מהי כמות האבנים המינימלית שיכולה להישאר?

7. לקרנף יש קמטי עור אופקיים ואנכיים, חלקם בצד ימין וחלקם בצד שמאל, סך הכל 17 קמטים. אם הקרנף מגרד את אחד הצדדים שלו על עץ, אז שני קמטים אופקיים או שני קמטים אנכיים על הצד הזה נעלמים, ועל הצד השני מופיעים קמט אחד אופקי וקמט אחד אנכי. אם אין שני קמטים באותו כיוון, אז שום דבר לא קורה. הקרנף גירד את עצמו מספר פעמים. האם יכול להיות שעכשיו בכל צד מספר הקמטים האנכיים זהה למספר הקמטים האופקיים שהיו לפני זה, ומספר הקמטים האופקיים זהה למספר הקמטים האנכיים שהיו לפני זה?

8. נתון לוח  $10 \times 10$  בו כל משבצת שחורה או לבנה. מותר במהלך אחד להחליף צבעים בכל המשבצות של ריבוע  $2 \times 2$  כלשהו שמורכב מ-4 משבצות.  
א. הוכיחו כי לא ניתן, בהינתן מצבים התחלתיים מסוימים, להפוך את כל המשבצות לשחורות.  
ב. כמה משבצות שחורות ניתן להבטיח מכל מצב התחלתי?

9. **חרגולים.** בכל צעד, חרגול יכול לקפוץ מעל לחרגול אחר, כך שמיקום החרגול האחר הוא אמצע הקטע המחבר את נקודת ההתחלה ונקודת הסוף של הקפיצה. החרגולים קופצים מספר פעמים.

א. בהתחלה 4 חרגולים עומדים בארבע פינות של ריבוע. האם ניתן להגיע למצב שבו 3 על ישר?  
ב. ארבעה חרגולים עומדים בארבע פינות של ריבוע. האם הם יכולים להגיע למצב שבו הם עומדים בארבע פינות של ריבוע עם צלע גדולה פי 3?  
ג. שלושה חרגולים עומדים בנקודות  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$ . האם לאחר מספר צעדים הם יכולים לעמוד בנקודות  $(0,0)$ ,  $(-2,3)$ ,  $(1,0)$  (לא בהכרח לפי הסדר)?

**בתאבון!**