

אינווריאנטים

1. בקודקודי המשושה רשומים מספרים 12, 1, 10, 6, 8, 3 בסדר זה. מותר בכל מהלך או להוסיף 1 לשני מספרים סמוכים, או להחסיר 1 משני מספרים סמוכים לפי בחירתך. האם לאחר מספר מהלכים ניתן לעבור למצב שהמספרים במעגל יהיו 10, 1, 10, 6, 6, 3 בסדר זה?

2. על הלוח כתובים המספרים 5, 6, 7, 8, 9. בכל שלב ושלב, בוחרים שני מספרים שרשומים על הלוח, קוראים להם a ו- b ומחליפים אותם במספרים $\frac{4a+3b}{5}$ ו- $\frac{3a-4b}{5}$. האם ניתן לאחר מספר פעולות להגיע למצב שהמספרים על הלוח יהיו 5, 7, 7, 7, 9?

3. נתונה שורה של $n \geq 7$ משבצות. בשלושת המשבצות השמאליות ביותר עומדים חיילים לבנים; בשלושת המשבצות הימניות ביותר עומדים חיילים שחורים. השחקן הלבן והשחקן השחור משחקים בתורות; השחקן הלבן מתחיל. בכל מהלך מותר לכל שחקן לקחת חייל בצבע שלו ולהזיז אותו למשבצת סמוכה, כל עוד היא לא תפוסה על ידי חייל באותו הצבע. אם במשבצת שאליה הוא מזיז את החייל יש כבר חייל בצבע הנגדי, השחקן מוריד מהלוח את שני החיילים (החייל שלו והחייל של היריב). השחקן שמוריד את שני החיילים האחרונים מהלוח מנצח. למי יש אסטרטגיה מנצחת, ללבן או לשחור, ואיזו? (התשובה יכולה להיות תלויה ב- n).

4. לקרנף יש קמטי עור אופקיים ואנכיים, חלקם בצד ימין וחלקם בצד שמאל, סך הכל 17 קמטים. אם הקרנף מגרד את אחד הצדדים שלו על עץ, אז שני קמטים אופקיים או שני קמטים אנכיים על הצד הזה נעלמים, ועל הצד השני מופיעים קמט אחד אופקי וקמט אחד אנכי. אם אין שני קמטים באותו כיוון, אז שום דבר לא קורה. הקרנף גירד את עצמו מספר פעמים. האם יכול להיות שעכשיו בכל צד מספר הקמטים האנכיים זהה למספר הקמטים האופקיים שהיו לפני זה, ומספר הקמטים האופקיים זהה למספר הקמטים האנכיים שהיו לפני זה?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

5. על במשבצות הלוח מונחות אבנים בכמויות שרשומות. בכל מהלך מותר לבחור 3 משבצות ברצף באותה שורה או באותה עמודה, ולהורי אבן משלושת המשבצות. מהי כמות האבנים המינימלית שיכולה להישאר?

6. חרגולים

שאלות על חרגולים בשדה. בכל צעד, חרגול יכול לקפוץ מעל לחרגול אחר, כך שמיקום החרגול האחר הוא אמצע הקטע המחבר את נקודת ההתחלה ונקודת הסוף של הקפיצה. החרגולים קופצים מספר פעמים.

א. בהתחלה 4 חרגולים עומדים בארבע פינות של ריבוע. האם ניתן להגיע למצב שבו 3 על ישר?

ב. ארבעה חרגולים עומדים בארבע פינות של ריבוע. האם הם יכולים להגיע למצב שבו הם עומדים בארבע פינות של ריבוע עם צלע גדולה פי 2?

ג. שלושה חרגולים עומדים בנקודות $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$. האם לאחר מספר צעדים הם יכולים לעמוד בנקודות $(0,0)$, $(-2,3)$, $(1,0)$ (לא בהכרח לפי הסדר)

ד. שלושה חרגולים עומדים בנקודות $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$. האם לאחר מספר צעדים הם יכולים לעמוד בנקודות $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,0)$ (לא בהכרח לפי הסדר)

7. על הלוח רשומים מספרים ממשיים $a_1, a_2, \dots, a_{5774}$. בכל מהלך בוחרים שני מספרים a ו- b שרשומים על הלוח, מוחקים את שניהם ורושמים מספר $\frac{1+a+b-3ab}{3-a-b-ab}$. נניח שבמהלך המשחק אף פעם לא היה צריך לבצע חלוקה ב-0, ובסופו של דבר נשאר על הלוח מספר אחד. הוכיחו, שניתן לדעת את המספר הזה מראש, בלי לדעת באיזה סדר מוחקים מספרים.

בתאבון!