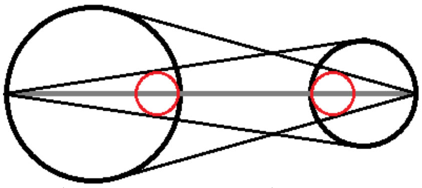
הומותטיה (מתיחה אחידה)
הומותטיה (מתיחה אחידה)

1. א. האם אפשר לחסום שדה ראייה במישור על ידי שלושה עיגולים זרים?
ב. האם אפשר לחסום שדה ראייה במרחב על ידי ארבעה כדורים זרים?

2. על הצלעות AB, CB, CD, AD נבחרו נקודות P, Q, R, S בהתאמה כך ש- $\frac{AP}{PB}=\frac{CQ}{QB}=\frac{CR}{RD}=\frac{AS}{SD}$. הוכח\י כי PQRS מקבילית.



3. נתונים שני מעגלים שלא נחתכים ולא מכילים זה את זה. על המעגל הראשון לוקחים את הנקודה המרוחקת ביותר מהמעגל השני, ומעבירים ממנה שני משיקים למעגל השני. נבנה מעגל אדום בתוך המעגל הראשון, שמשיק למעגל הראשון מבפנים ומשיק גם לשני הישרים שהעברנו. באופן דומה בונים מעגל אדום בתוך המעגל השני. הוכיחו ששני המעגלים האדומים הם באותו הגודל.

בניות

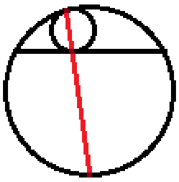
4. כיצד לחסום ריבוע במשולש נתון?

5. כיצד לבנות משולש לפי גבהים?

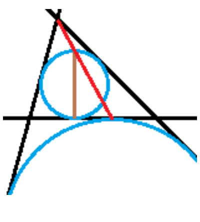
6. נתונה נקודה בתוך עיגול. כיצד לבנות מיתר, שהנקודה מחלקת אותו ביחס נתון (למשל 2:3)?

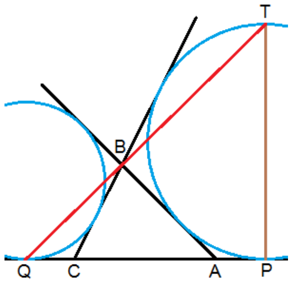
על ישר אחד

מרכז הומותטיה, נקודה לפני הומותטיה ותמונה שלה אחרי הומותטיה נמצאים על ישר אחד.



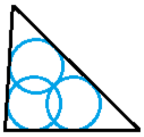
7. בתוך מעגל גדול העבירו מיתר (שמחלק אותו לשני קשתות) והעבירו מעגל שמשיק גם למיתר וגם לאחת הקשתות. הוכיחו כי אמצע הקשת השנייה נמצאת על ישר אחד עם נקודות ההשקה של המעגל הקטן עם המיתר ועם המעגל הגדול.





8. א. במשולש ABC ניקח שני מעגלים שמשיקים מבחוץ לצלעות AB, BC שמשיקים להמשכי AC בנקודות P, Q בהתאמה. יהיה PT קוטר של מעגל הראשון, הוכח ש-Q, B, T נמצאות על ישר אחד.
ב. הכלילו והוכיחו טענה דומה גם למקרה, שאחד המעגלים חסום מבפנים (הציור משמאל).

9. ישר אוילר: בכל משולש נקודת מפגש התיכונים, נקודת מפגש הגבהים, נקודת מפגש האנכים האמצעים, ומרכז של מעגל 9 הנקודות נמצאים על ישר אחד.
רדיוס של מעגל 9 הנקודות שווה למחצית רדיוס המעגל החוסם.

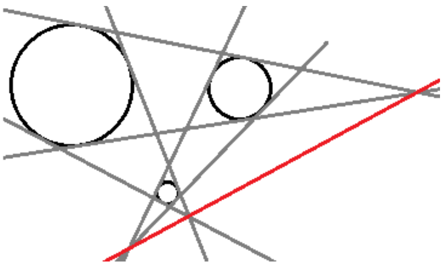


10. א. בתוך משולש נבנו שלושה מעגלים שווי רדיוס שנפגשים בנקודה K. נסמן גם O – מרכז המעגל החוסם של המשולש, I מרכז המעגל החסום. הוכיחו כי K, I, O על אותו ישר.

ב. נניח כי באותו משולש נבנו שלושה מעגלים שווי רדיוס שכל שניים מהם נחתכים, אבל לאו דווקא יש נקודת חיתוך משותפת לכל השלושה. לכל שני מעגלים נבנה את המיתר המשותף. מיתרים משותפים אלה נחתכים בנקודה L. הוכיחו כי L גם נמצא על הישר OI.

שימוש במספר הומותטיות

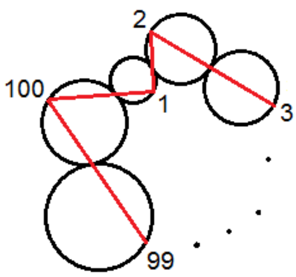
משפט. הרכבה של הומותטיה עם מקדם α ***והומותטיה עם מקדם*** β ***זו הומותטיה עם מקדם*** $\alpha\beta$ ***או הזזה במקרה ש-***$\alpha\beta=1$.



11. (משפט מונז')

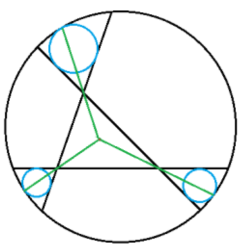
א. נתונים 3 מעגלים במישור. לכל זוג מעגלים ניקח את נקודת חיתוך של שני המשיקים החיצוניים. הוכח כי שלוש נקודות החיתוך הללו נמצאים על ישר אחד.

ב. הכלילו והוכיחו את הטענה למקרה שבשני זוגות מעגלים לוקחים משיקים פנימיים ולא חיצוניים.

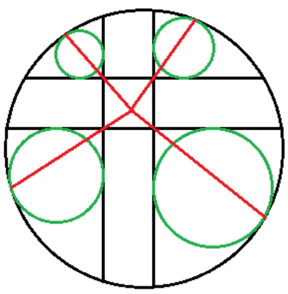


12. א. נתונים 100 מעגלים שמשיקים זה לזה באופן חיצוני במחרוזת (גם המעגל ה-100 משיק למעגל הראשון). מתחילים מנקודה על המעגל הראשון ועוברים מנקודה לנקודה על המעגל הבא שהיא נקודת חיתוך שנייה של מיתר שמחבר מספר N ונקודת ההשקה של מעגים N, N+1, ולוקחים נקודת חיתוך השנייה עם המעגל ה-N+1.
הוכח שנקודה מספר 101 מתלכדת עם נקודה 1.

ב. מה קורה למספר אי-זוגי של מעגלים?



13. בציור יש משולש שנמצא בתוך עיגול. ממשיכים את צלעות המשולש עד החיתוכים עם העיגול. לוקחים 3 מעגלים, שכל אחד מהם משיק למעגל ולשני המשכי הצלעות של משולש, כמו בציור. מעבירים קווים ישרים שעוברים דרך נקודות השקה של המעגלים וקודקודים מתאימים של המשולש. הוכיחו כי שלושה ישרים אלה נפגשים בנקודה אחת.



14. בציור יש ריבוע שנמצא בתוך עיגול (אבל לאו דווקא מרכז, כלומר התמונה לא סימטרית. ממשיכים את צלעות הריבוע עד החיתוכים עם העיגול. לוקחים 3 מעגלים, שכל אחד מהם משיק למעגל ולשני המשכי הצלעות כמו בציור. מעבירים קווים ישרים שעוברים דרך נקודות השקה של המעגלים וקודקודים מתאימים של המשולש. הוכיחו כי ארבעה ישרים אלה נפגשים בנקודה אחת.

15. על שולחן מלבני מונחים 100 מטבעות זהים, כך שלא ניתן להוסיף לשולחן מטבע שלא נוגע במטבע אחר. הוכיחו כי ניתן לכסות את השולחן כולו על ידי 400 מטבעות מאותו סוג.

16. שני מעגלים ω_1 ו- ω_2 בעלי רדיוסים שווים נחתכים בנקודות שונות X_1 ו- X_2. מעגל ω משיק ל- ω_1 בנקודה T_1 מבפנים ו- ω_2 מבחוץ בנקודה T_2. הוכיחו כי הישרים X_1T_1 ו- X_2T_2 נפגשים על ω.

17. ABC משולש, המעגל החסום משיק לצלעותיו בנקודות P, Q, R (כאשר P מול A, Q מול B), אמצעי הקשתות BC, AC, AB של המעגל החוסם יסומנו U, V, W בהתאמה, ומרכזי המעגלים החסומים מבחוץ של ABC יסומנו J, K, L (כאשר J מול A, ו-K מול B).

א. הוכיחו כי PU, QV, RW נפגשים בנקודה אחת. נקודה זו תסומן X.

ב. הוכיחו כי PJ, QK, RL נפגשים בנקודה אחת. נקודה זו תסומן Y.

ג. הוכיחו כי UJ, VK, WL נפגשים בנקודה אחת. נקודה זו תסומן Z.

ד. הוכיחו כי X, Y, Z נמצאים על ישר אחד.

18. נתונים שלושה מעגלים שונים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ שמשיקים זה לזה ושווים בגודלם. מעגל נוסף β משיק לשלושתם בנקודות A_3, A_2, A_1 בהתאמה. תהי P נקודה על β שלא מתלכדת עם A_3, A_2, A_1.
עבור $i = 1,2,3$ נסמן ב- B_i את נקודת החיתוך השנייה של הישר PA_i עם המעגל α_i. הוכח כי המשולש $B_1B_2B_3$ הוא שווה צלעות.

19. יהי ABCD מרובע קמור שבו $BA \neq BC$. נסמן ω_1 ו- ω_2 את המעגלים החסומים במשולשים ABC ו-ADC. נתון שקיים גם מעגל ω שמשיק להמשכו של BA מעבר ל-A ולהמשכו של BC מעבר ל-C, ומשיק גם לישרים AD ו-CD. הוכיחו כי המשיקים החיצוניים המשותפים של המעגלים ω_1 ו- ω_2 נחתכים על ω.

20. א. אם כל אחד משלושה עיגולים כחולים ל-4 ישרים בציור, אז יש גם העיגול שמשיק ל-4 ישרים (כמו בציור מימין).

ב*. אפשר להחליף בסעיף א' שתי נקודות בעוד שני עיגולים כחולים (כמו בציור משמאל).