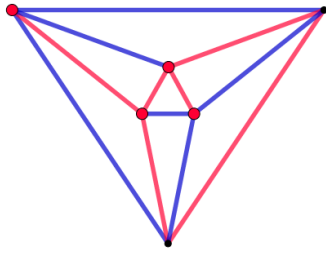


## קומבינאומטריה



1. מקצועות של פאון קמור צבועים בשני צבעים: כחול ואדום, כך שליד כל קודקוד מופיע מקצוע מכל צבע. הראו שקיים קודקוד שאם מסתכלים על סדר הצבעים הציקלי של המקצועות שמחברים אליו, יש בדיוק שתי החלפות בין הצבעים (כלומר יש רצף אדום ורצף כחול).
2. במישור סומנו נקודות כחולות ואדומות (מספר סופי). על כל ישר בין שתי נקודות מאותו הצבע יש נקודה מהצבע האחר. הראו כי כל הנקודות נמצאות על ישר אחד.
3. בתוך סימפלקס  $n$ -ממדי נבחרה נקודה. הראו שיש לפחות  $n$  זוויות קהות בין קרניים מהנקודה אל קודקודי הסימפלקס.
4. הוכיחו שבתוך כל צורה קמורה  $K$  במישור ניתן לבחור נקודה  $O$  כך שכל ישר דרך  $O$  יחתוך את השפה של  $K$  בשתי נקודות  $X$  ו- $Y$ , שמקיימות  $\frac{1}{2} \leq \frac{OX}{OY} \leq 2$ .
5. נקודות  $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$  במישור נמצאות במצב כללי (אף 3 מהן לא על ישר אחד). הראו כי ניתן לתת להם שמות מחדש  $B_1, B_2, \dots, B_{2n}$  כך שהקטעים  $B_{2i-1}B_{2i}$  ו- $B_{2j-1}B_{2j}$  לא נחתכים, ובנוסף
 
$$B_1B_2 + B_3B_4 + \dots + B_{2n-1}B_{2n} \geq \frac{2}{\pi} (A_1A_2 + A_3A_4 + \dots + A_{2n-1}A_{2n})$$
6. קבוצת ישרים במישור הינה **במצב כללי** אם אף שניים אינם מקבילים, ואף שלושה לא עוברים דרך אותה הנקודה. קבוצה של ישרים במצב כללי מחלקת את המישור לאזורים; האזורים ששטחם סופי יכינו **האזורים הסופיים** של קבוצת הישרים. הוכח כי לכל  $n$  גדול מספיק, בכל קבוצה של  $n$  ישרים במצב כללי, ניתן לצבוע לפחות  $\sqrt{n}$  מהישרים בכחול כך שלאף אזור סופי אין שפה שכולה כחולה.
7. הראו שכל  $3n$  נקודות במישור במצב כללי ניתן לחלק ל- $n$  משולשים כך שחיתוך המשולשים לא יהיה ריק.
8. האם ניתן לחלק מתומן משוכלל למשולשים כך שכל קודקוד בשילוש יהיה מדרגה זוגית?
9. על כוכב לכת כדורי נוחתים 10 חייזרים. מה הסיכוי שהם נחתו באותו חצי כדור?

**10.** נגיד שתת-קבוצה של  $\mathbb{R}^n$  היא  $k$ -מוכלת בעל-מישור אם יש פחות מ- $k$  נקודות בקבוצה שנמצאות מחוץ לעל-מישור (למשל 1-מוכלת זה פשוט מוכלת).  
נקרא לקבוצה סופית של נקודות  $k$ -גנרית אם אין אף על-מישור ש- $k$ -מכיל אותה.  
נקרא לקבוצה  $k$ -גנרית מצומצמת, אם היא לא מכילה קבוצה  $k$ -גנרית עם פחות נקודות.  
מצא את  $d(k, n)$ : המספר המרבי של נקודות שיכולות להיות בקבוצה  $k$ -גנרית מצומצמת.

**11.** נתון אוסף קטעים במרחב כך שסכום הזוויות שבהן ראשית הצירים רואה את קטעי האוסף קטן ממש מ- $\pi$ . הראה שקיים מישור דרך ראשית הצירים שלא חותך אף קטע.

**12.** נתונים 100 מעגלים במישור מרדיוס 1 שיוצרים צורה קשירה. הראו שיש לפחות 100 נקודות בהן עובר יותר ממעגל אחד.

**13.** בתוך מצולע קמור בעל  $N$  צלעות נבחרו  $N$  נקודות שונות.  
א. הוכח שיש זיווג בין הנקודות לבין הצלעות כך שאוסף הקמורים של כל נקודה והצלע שלה הוא אוסף של  $N$  משולשים זרים.  
ב. הוכח שיש זיווג בין הנקודות לבין הצלעות כך שאוסף הקמורים של כל נקודה והצלע שלה הוא אוסף של  $N$  משולשים שמכסים את המצולע.