מה הסיכוי?

1. בכיתה יש N תלמידים, מתוכם בנים ובנות, וכל בן מכיר לפחות בת אחת. הוכיחו שניתן לבחור קבוצה של לפחות $N/2$ תלמידים, כך שכל בן בקבוצה מכיר כמות אי-זוגית של בנות מהקבוצה.

2. באולימפיאדה מתמטית במדינה זרה השתתפו 200 מתחרים, והיו בה 6 שאלות. כל שאלה נפתרה על ידי לפחות 120 מתחרים. הוכיחו שיש שני מתחרים שפתרו יחד את כל השאלות.

3. יהי $\mathcal{S}$ אוסף של מחרוזות בינאריות, כך שאף איבר ב-$\mathcal{S}$ אינו תחילית של איבר אחר. נסמן ב-N_i את כמות המחרוזות מאורך i ב-$\mathcal{S}$. הוכיחו שמתקיים $\sum_i \frac{N_i}{2^i} \leq 1$.

4. תהי A קבוצה סופית של שלמים חיוביים. הוכיחו שקיימת לה תת-קבוצה בגודל $\frac{1}{3}|A|$ לפחות, שאין בה שלושה מספרים a, b, c המקיימים $a + b = c$.

5. נתונים $a, b, c \geq 0$ המקיימים $a + b + c = 1$, ומספר טבעי m. הוכיחו כי

$$(1 - a^m)^m + (1 - b^m)^m + (1 - c^m)^m \geq 2$$

6. א. הוכיחו שבכל גרף $G = (V, E)$ יש אנטי-קליקה בגודל לפחות

$$\sum_{v \in V} \frac{1}{\deg(v) + 1}$$

ב. הוכיחו את משפט טורן: מבין הגרפים עם n קודקודים שאינם מכילים k-אנטי-קליקה, האחד בעל הכי מעט קשתות הוא איחוד של $k - 1$ קליקות זרות בגדלים $\left\lceil \frac{n}{k-1} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{k-1} \right\rfloor$. (זה ניסוח שקול למשפט טורן)

7. אייל צייר במישור גרף פשוט עם v קודקודים ו-e קשתות, כך ש-$e \geq 4v$, וספר כמה חיתוכים ישנם בין קשתות שונות בגרף (קודקוד לא נחשב נקודת חיתוך). הוכיחו שיש לפחות $\frac{e^3}{64v^2}$ חיתוכים.

8. קבוצה $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ של שלמים חיוביים נקראת **שונת-סכומים** אם כל 2^k הסכומים מהצורה $\sum_{i \in S} x_i$, כאשר $S \subseteq \{1, \ldots, k\}$, הם שונים. נתונה קבוצה שונת סכומים $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$. הוכיחו שמתקיים

$$n \geq \frac{2^k}{C\sqrt{k}}$$

עבור קבוע C כלשהו.

בתיאבון!