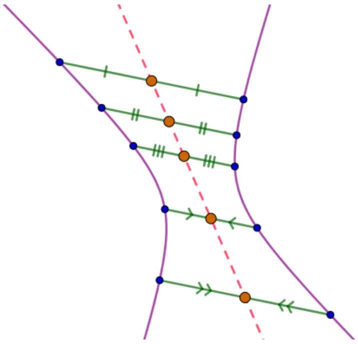
תרגיל בגיאומטריה אנליטית



1. הוכיחו את משפט אפולוניוס: לכל שניונית, האמצעים של מיתרים מקבלים נמצאים על ישר אחד.
איך אפשר להכליל את משפט אפולוניוס?

2. על פני היפרבולה ישרה (נגיד $xy=1$) נבחרו שתי נקודות סימטריות ביס למרכזה, K ו-M. מעגל שמרכזו M חותך את ההיפרבולה ב-4 נקודות: A, B, C ו-K. הוכיחו כי המשולש ABC משוכלל.

3. במשושה קמור ABCDEF מתקיים $AB=CD=EF$ וגם $BC=DE=FA$. הישרים AB, CD, EF יוצרים משולש משוכלל. הראו שגם הישרים BC, DE, FA יוצרים משולש משוכלל.

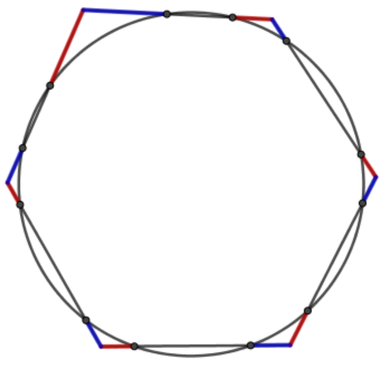
4. נקודה תקרא ***שלמה***, אם שתי הקואורדינאטות שלה שלמות. ישר נקרא **שלם**, אם יש עליו נקודות שלמות (יותר מאחת). כמה ישרים שלמים משיקים למעגל יחידה עם מרכז בראשית הצירים?

5. מצולע משוכלל בעל n צלעות שקודקודיו $A_1, A_2, \ldots, A_n$, חסום במעגל שרדיוסו R ומרכזו O. נקודה B באותו מישור מקיימת $BO=\ell$.

הוכח כי $BA_1^4+\ldots+BA_n^4=n\left(R^4+4R^2\ell^2+\ell^4\right)$.

מצאו הכללה עבור חזקה $2k$ ולא 4, כאשר $n>k$.

6. הנקודות A, B, C, D לא נמצאות במישור אחד. אליפסואיד במרחב פוגש את הקטע AB בנקודות P_1, P_2, את הקטע BC בנקודות Q_1, Q_2, את הקטע CD בנקודות R_1, R_2 ואת הקטע DA בנקודות T_1, T_2. הראו כי אם הנקודות P_1, Q_1, R_1, T_1 נמצאות על מישור אחד, אז גם הנקודות P_2, Q_2, R_2, T_2.



הכלילו את הטענה למקרה של משטחים ממעלה n.

7. נתון מצולע שכל צלעותיו הן באותו אורך, ומעגל שחותך כל צלע שלו פעמיים; כלומר כל צלע שלו מחולק על ידי המעגל ל-3 חלקים. החלקים של כל צלע צבועים בצבעים: אדום, שחור וכחול, בסדר זה כשעוברים על המצולע נגד כיוון השעון. הראו שסכום הקטעים הכחולים שווה לסכום הקטעים האדומים.

8. פאון משוכלל בעל N קודקודים חסום בכדור שרדיוסו R. בוחרים ישר אקראי ℓ דרך מרכז הכדור. מצאו את סכום ריבועי המרחקים מקודקודים של הפאון ל-ℓ.

9. מנקודה M בתוך מצולע משוכלל מורידים אנכים $MK_1, MK_2, \ldots, MK_n$ על צלעות המצולע או על המשכיהן. הוכיחו כי $\overrightarrow{MK_1}+\overrightarrow{MK_2}+\ldots+\overrightarrow{MK_n}=\frac{n}{2}\cdot\overrightarrow{MO}$ כאשר O זה מרכז המצולע.
הכלילו לפאון משוכלל תלת-ממדי.

בתאבון!