

חכמים וקוסמים (המשך לירדן)

7. הפעם דרקון תפס 4 גמדים. לדרקון יש כמות לא מוגבלת של כובעים ב-3 צבעים. הוא מושיב את הגמדים במעגל מסביב לדרקון עצמו, הגמדים יעצמו עיניים והוא ישים כובע על ראש של כל גמד. לאחר מכן הגמדים מתבקשים בו-זמנית לנחש את צבע הכובע של עצמם (הם רושמים תשובות על פתקים ומוסרים לדרקון). מכיוון שהדרקון אינו שקוף, גמד רואה רק את שני הגמדים שקרובים אליו ולא את הגמד הנגדי. האם אפשר לדאוג לכך שלפחות גמד אחד ינחש את הצבע שלו?

8. על ראשיהם של 99 חכמים היושבים סביב שולחן עגול הלבישו 50 קובעים בצבע אחד ו-49 קובעים בצבע אחר (אבל לא ידוע להם מאיזה צבע יש יותר קובעים). כולם מוזמנים לנחש את הצבעים שלהם בו-זמנית. האם הם יכולים לתאם מראש אסטרטגיה שתאפשר להם לתת לפחות 74 ניחושים נכונים בכל מקרה?

9. על מנת לעבור את המבחן, 1000 חכמים מסתדרים בשורה. יש כובעים הממוספרים מ-1 עד 1001. כובע אחד מוחבא, ואת האחרים מלבישים על החכמים בסדר אקראי. כל חכם רואה רק את הכובעים של אלה שלפניו. לאחר מכן, כל חכם, לפי הסדר (כאשר האחורי ראשון והקדמי אחרון), אומר בקול רם מספר שלם. כל מספר שאומרים צריך להיות בין 1 ל-1001, אבל אסור להגיד מספר שכבר נאמר. תוצאת המבחן היא כמות החכמים שאמרו את מספר הכובע שלהם. החכמים יודעים מראש את תנאי המבחן ויכולים לסכם איך לפעול.

א. האם הם יכולים להבטיח תוצאה של 500 לפחות?

ב. האם הם יכולים להבטיח תוצאה גדולה ממש מ-500?

ג. האם הם יכולים להבטיח תוצאה של לפחות 999?

10. בשורה עומדות N נורות ממוספרות. ניצן יכול להדליק או לכבות כל נורה לפי רצונו. לאחר שניצן מעביר את הנורות למצב כלשהו, בילבו נכנס לחדר. ניצן בוחר מספר שלם מ-1 עד $N+1$ ואומר אותו לבילבו. בילבו יכול (אבל לא חייב) לבקש מניצן לשנות את המצב של נורה אחת. לאחר מכן נכנס לחדר גנדלף, מסתכל על מצב הנורות, ואומר לניצן את המספר שהוא בחר. האם הקסם מתאפשר במקרה של

א. $N=3$?

ב. $N=5$?

ג. $N=7$?

11. בחפיסה יש קלפים שממוספרים 1 עד 100. לכל שני קלפים הקלף עם המספר הגדול חזק יותר מהקלף עם המספר הקטן, חוץ מזוג אחד של קלפים: קלף 1 חזק יותר מהקלף 100. הקלפים מונחים על השולחן בסדר מסוים אם המספרים כלפי מטה. מישהו שידוע את סדר הקלפים, יכול לספר לכם על כל זוג שהוא בוחר איזה קלף חזק יותר. הראו שהוא יכול באמצעות 100 הודעות מסוג זה לספר לכם מספיק נתונים על מנת שתוכלו לנחש על כל קלף מה המספר שלו.

12. לקוסם יש חפיסת קלפים ענקית, צד אחד של כל הקלפים נראה זהה, והצד האחר הוא באחד מבין 2017 צבעים, ויש 1000000 קלפים מכל צבע. הקוסם יוצא החוצה, ואז הצופים מניחים על השולחן $n > 1$ קלפים בשורה עם הצד הצבעוני קלפי מעלה. העוזר מסתכל על שורת הקלפים והופך כולם חוץ מאחד עם הצד האחיד קלפי מעלה. לאחר מכן נכנס הקוסם, מצביע על אחד מבין הקלפים ההפוכים ואומר את הצבע שלו. עבור איזה n מינימלי הקסם יצליח?

13. המלך הזמין למשתה 2015 קוסמים, חלקם טובים וחלקם רעים. כל הקוסמים יודעים מי טוב ומי רע, אך המלך אינו יודע דבר. קוסם טוב תמיד אומר אמת, וקוסם רע מחליט בכל רגע אם להגיד אמת או שקר. במשתה המלך ישאל כל אחד מהקוסמים שאלה אחת (שהתשובה עליה היא "כן" או "לא"). הקוסמים יענו לו על השאלות בו-זמנית, לאחר שאילת כל השאלות. לאחר קבלת התשובות, המלך יבחר קוסם אחד ויגרש אותו לביתו. הקוסם המגורש יצא דרך "דלת האש", שמגלה למלך האם הקוסם היה טוב או רע. לאחר מכן המלך שוב ישאל כל אחד מהקוסמים שנותרו שאלה אחת, ושוב יגרש את אחד הקוסמים, וכן הלאה, עד שהמלך יחליט לעצור ולא לגרש עוד קוסמים. המלך יכול לעצור גם לאחר קבלת התשובות, מבלי לגרש קוסם. הוכיחו כי המלך יכול לגרש את כל הקוסמים הרעים, תוך גירוש קוסם אחד טוב לכל היותר.

14. המלך החליט לפנק קבוצה של n חכמים. הוא שם אותם בטור אחד אחרי השני (כך שכולם מסתכלים לאותו כיוון) ושם לכל אחד כובע לבן או שחור על הראש כך שכל אחד מהם רואה את הכובעים של אלה שעומדים לפניו. החכמים אומרים לפי הסדר (מהאחרון בטור לראשון) צבע (לבן או שחור) ומספר שלם חיובי לבחירתם. בסוף המלך סופר כמה חכמים אמרו את הצבע של הכובע שעל ראשם, וזו כמות ימי החופשה שכל קבוצת החכמים תקבל. המלך הרשה לחכמים לסכם ביניהם מראש מה להגיד. אלא שאז החכמים גילו ש- k מתוכם משוגעים (אבל לא יודעים מי בדיוק) ואומרים צבע ומספר בלי קשר למה שסוכם מראש. מהו מספר ימי החופשה המקסימלי שהחכמים יכולים להבטיח לעצמם, ללא תלות במיקומם של החכמים המשוגעים בטור?

חכמים וקוסמים (דן)

1. בשורה עומדים 100 חכמים. על ראשיהם כובעים, כאשר כל כובע יכול להיות באחד מ-100 צבעים ידועים מראש. כל אחד רואה את כל הצבעים של האנשים שנמצאים בשורה לפניו. כל אחד מתבקש לנחש את צבע הכובע שלו בקול רם – החל מסוף השורה, מהאיש שרואה את כולם. מי שטועה בניחוש שלו, מוצא להורג. מותר לתאם מראש אסטרטגיה, שתאפשר לכמות מרבית של חכמים לשרוד. כמה מהם ישרדו?

2. n קוסמים יושבים סביב שולחן עגול. כל אחד מהם חובש כובע שחור או לבן, ורואה את צבעי הכובעים של כל הקוסמים פרט לכובע של עצמו. בכל דקה, המלך ארתור מצלצל בפעמון, וכל אחד מהקוסמים בוחר קוסם אחר באופן סודי ומטיל עליו כישוף (אסור לקוסם לכשף את עצמו, ואסור לו שלא לכשף אף אחד). כל קוסם יודע כמה קוסמים אחרים כישפו אותו, אך לא יודע מי הם. לאחר k צלצולי פעמון, כל הקוסמים מנחשים בו-זמנית מהו הצבע של הכובע אותו הם חובשים. לקוסמים מותר לגבש אסטרטגיה לפני הכניסה לחדר, אך לאחר מכן אסור להם לתקשר. מהו ה- k המינימלי עבורו הקוסמים מסוגלים להבטיח שכולם יהיו צודקים?

3. המלך זימן שני חכמים. הוא נתן לחכם הראשון 100 כרטיסי נייר ריקים, וציווה עליו לכתוב על כל כרטיס מספר טבעי (המספרים לא חייבים להיות שונים), בלי להראות את הכרטיסים לחכם השני. לאחר מכן החכם הראשון יכול להגיד לחכם השני כמה מספרים שונים, שכל אחד מהם כתוב על אחד הכרטיסים, או שווה לסכום המספרים על חלק מהכרטיסים, אבל בלי להגיד איך הוא יצר כל מספר. החכם השני צריך לגלות את 100 המספרים אשר כתובים על הכרטיסים, ולהוכיח למלך שזאת האופציה היחידה. אם הוא לא יצליח, יערפו לשני החכמים את הראש. אם הוא יצליח לספק את ההוכחה, המלך יתלוש מהזקן של כל אחד מהחכמים מספר שערות כמות המספרים שהחכם הראשון אמר לחכם השני. כיצד החכמים יכולים להישאר בחיים ולאבד מספר מינימלי של שערות, אם הם לא יכולים לתאם מראש?

4. דרקון תפס את 6 הגמדים. לדרקון יש 7 כובעים ב-7 צבעי הקשת (ידועים מראש). הוא הולך להעביר להם בבוקר מבחן תבונה – הגמדים יעצמו עיניים, הדרקון ישים כובע אחד על ראש של כל גמד ואז הגמדים יתבקשו בו-זמנית לנחש, מה צבע הכובע שלהם. הדרקון מאיים שאם פחות מחצי ינחשו נכון, הוא יוכל את כולם. האם הגמדים יוכלו לשרוד?

5. במעגל עומדים N חכמים. על ראשיהם כובעים, כאשר כל כובע יכול להיות באחד מ-100 הצבעים הידועים מראש. כל אחד רואה את כל הצבעים חוץ מהצבע שלו. כל אחד מתבקש לנחש את צבע הכובע שלו (הם מוסרים את הניחושים בו-זמנית). האם הם יכולים לתאם מראש, כך שלפחות אחד מהם בהכרח יצליח לנחש נכון? (התשובה תלויה ב- N).

6. המלך הזמין למשתה 2015 קוסמים, חלקם טובים וחלקם רעים. כל הקוסמים יודעים מי טוב ומי רע, אך המלך אינו יודע דבר. קוסם טוב תמיד אומר אמת, וקוסם רע מחליט בכל רגע אם להגיד אמת או שקר. במשתה המלך ישאל כל אחד מהקוסמים שאלה אחת (שהתשובה עליה היא "כן" או "לא"). הקוסמים יענו לו על השאלות בו-זמנית, לאחר שאילת כל השאלות. לאחר קבלת התשובות, המלך יבחר קוסם אחד ויגרש אותו לביתו. הקוסם המגורש יצא דרך "דלת האש", שמגלה למלך האם הקוסם היה טוב או רע. לאחר מכן המלך שוב ישאל כל אחד מהקוסמים שנותרו שאלה אחת, ושוב יגרש את אחד הקוסמים, וכן הלאה, עד שהמלך יחליט לעצור ולא לגרש עוד קוסמים. המלך יכול לעצור גם לאחר קבלת התשובות, מבלי לגרש קוסם. הוכיחו כי המלך יכול לגרש את כל הקוסמים הרעים, תוך גירוש קוסם אחד טוב לכל היותר.

7. הפעם דרקון תפס 4 גמדים. לדרקון יש כמות לא מוגבלת של כובעים ב-3 צבעים. הוא מושיב את הגמדים במעגל מסביב לדרקון עצמו, הגמדים יעצמו עיניים והוא ישים כובע על ראש של כל גמד. לאחר מכן הגמדים מתבקשים בו-זמנית לנחש את צבע הכובע של עצמם (הם רושמים תשובות על פתקים ומוסרים לדרקון). מכיוון שהדרקון אינו שקוף, גמד רואה רק את שני הגמדים שקרובים אליו ולא את הגמד הנגדי. האם אפשר לדאוג לכך שלפחות גמד אחד ינחש את הצבע שלו?

8. המלך החליט לפנק קבוצה של n חכמים. הוא שם אותם בטור אחד אחרי השני (כך שכולם מסתכלים לאותו כיוון) ושם לכל אחד כובע לבן או שחור על הראש כך שכל אחד מהם רואה את הכובעים של אלה שעומדים לפניו. החכמים אומרים לפי הסדר (מהאחרון בטור לראשון) צבע (לבן או שחור) ומספר שלם חיובי לבחירתם. בסוף המלך סופר כמה חכמים אמרו את הצבע של הכובע שעל ראשם, וזו כמות ימי החופשה שכל קבוצת החכמים תקבל. המלך הרשה לחכמים לסכם ביניהם מראש מה להגיד. אלא שאז החכמים גילו ש- k מתוכם משוגעים (אבל לא יודעים מי בדיוק) ואומרים צבע ומספר בלי קשר למה שסוכם מראש. מהו מספר ימי החופשה המקסימלי שהחכמים יכולים להבטיח לעצמם, ללא תלות במיקומם של החכמים המשוגעים בטור?

9. בשורה עומדות N נורות ממוספרות. ניצן יכול להדליק או לכבות כל נורה לפי רצונו. לאחר שניצן מעביר את הנורות למצב כלשהו, בילבו נכנס לחדר. ניצן בוחר מספר שלם מ-1 עד $N+1$ ואומר אותו לבילבו. בילבו יכול (אבל לא חייב) לבקש מניצן לשנות את המצב של נורה אחת. לאחר מכן נכנס לחדר גנדלף, מסתכל על מצב הנורות, ואומר לניצן את המספר שהוא בחר. האם הקסם מתאפשר במקרה של

א. $N = 3$?

ב. $N = 5$?

ג. $N = 7$?