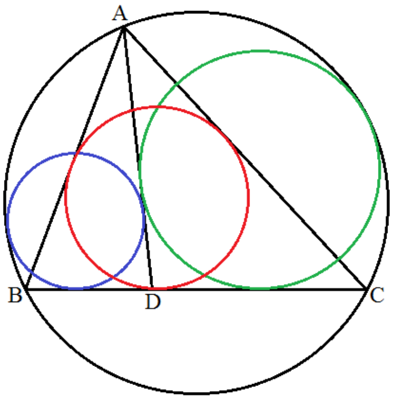
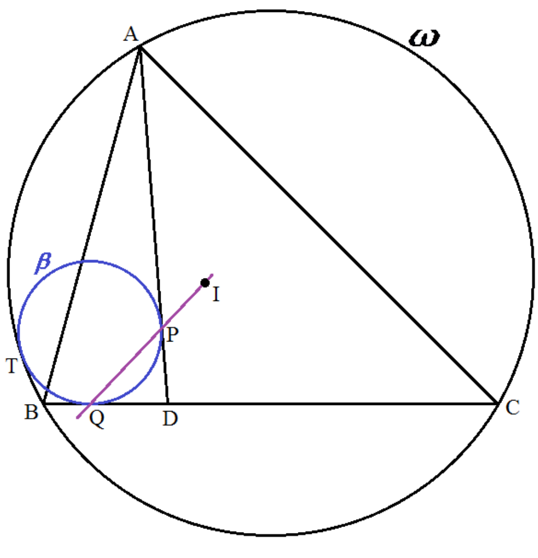
מעגל חצי חסום

הלמה של ורייר (Verrier). משולש ABC חסום במעגל Ω. מעגל μ משיק לצלעות AB ו-AC בנקודות T ו-S, ומשיק גם ל-Ω מבפנים. אזי מרכז המעגל החסום במשולש הוא האמצע של ST.



משפט טבו (Thebault). על הצלע BC של משולש ABC נבחרה נקודה אקראית D. נצייר 3 מעגלים: המעגל α שחסום במשולש ABC, ושני המעגלים β,γ שמשיקים בו-זמנית לקטעים AD, BC ולמעגל החוסם. הוכיחו שהמרכזים של α,β,γ נמצאים על ישר אחד.

הערה. הטענה פורסמה לראשונה ב-1938 על ידי Victor Thebault ללא הוכחה, והייתה שאלה פתוחה מעל 30 שנה. בעצם היא נובעת מהלמה של סאוואימה שהומצאה עוד קודם.



פתרון ראשון. נסמן ב-ω את המעגל החוסם של המשולש ABC. נניח כי β זה המעגל שמשיק ל-BD בנקודה Q, ל-AD בנקודה P, ול-AB בנקודה T. כמו כן, נסמן ב-I את מרכז המעגל החסום של משולש ABC.

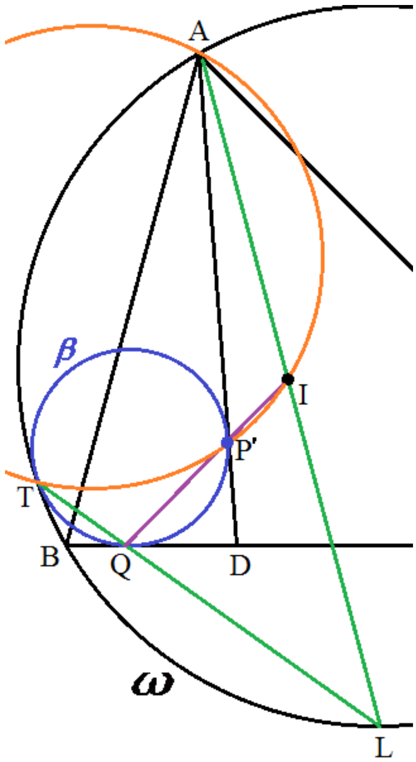
הלמה של סוויאמה (Sawayama). הנקודות P, Q, I נמצאות על ישר אחד.

הוכחה הלמה. נסמן ב-P' את נקודת החיתוך הנוספת של IQ עם המעגל β. נסמן ב-L את הנקודה הנוספת של המעגל החוסם של המשולש ABC עם AI. מכיוון ש-AI חוצה את הזווית BAC, הנקודה L חייבת להיות באמצע הקשת BC. ניתן תמיד לסובב את הציור כך, שהקטע BC יהיה אופקי, ו-A יהיה מעל BC. אז L היא הנקודה הנמוכה ביותר של ω, כמו ש-Q היא הנקודה הנמוכה ביותר של β. קיימת הומותטיה עם מקדם חיובי ומרכז ב-T שמעבירה את ω ל-β, ולכן היא מעברה את L ל-Q, לכן T, L, Q על ישר אחד.

נראה כי הזוויות BQT, QP'T, TAI שוות. אכן, לפי חשבון קשתות ב-ω

$$\sphericalangle BQT=\frac{1}{2}\left(BT+CL\right)=\frac{1}{2}\left(BT+BL\right)=\frac{1}{2}TL=\sphericalangle TAI$$

ולפי חשבון קשתות ב-β, מקבלים $\sphericalangle QP'T=\frac{QT}{2}=\sphericalangle BQT$.



ובכן $\sphericalangle QP'T=\sphericalangle TAI$, לכן המרובע $TAIP'$ חסום.
לפי משפט התלתן, ודמיון משולשים LBT, LQB מקבלים $LQ\cdot LT=LB^2=LI^2$.

לכן גם המשולשים LQI, LIT דומים.

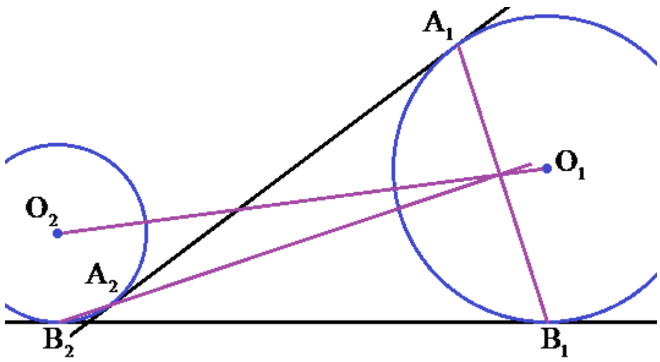
מכאן מתקבל שוויון זוויות: $\sphericalangle LQI=\sphericalangle LIT$.

לכן $\sphericalangle TQP'=\sphericalangle AIT=\sphericalangle AP'T$.

אבל $\sphericalangle TQP'=\sphericalangle AP'T$ בעצם אומר, ש-AP' משיק ל-β. לכן P' זה בעצם P.

בזה הוכחנו את הטענה.

בנוסף, הוכחנו כי $AIPT$ מרובע חסום.

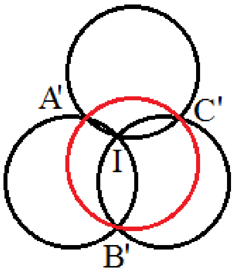


טענה 2. לשני מעגלים שמרכזיהם O_2 , O_1 העבירו משיק פנימי משותף שמשיק למעגל ראשון ב-A_1 ולשני ב-A_2, ומשיק חיצוני משותף של שמשיק למעגל הראשון ב-B_1 ולשני ב-B_2. אזי O_1O_2 , A_2B_2 , A_1B_1 נפגשים בנקודה אחת.

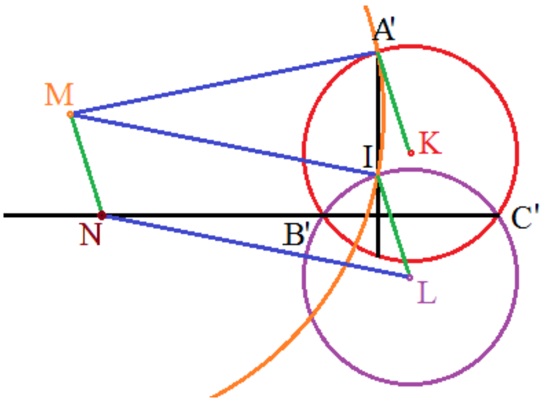
הוכחת טענה 2. נסמן ב-T את נקודת המפגש של A_2B_2 , A_1B_1. קל לראות שהישרים A_2B_2 , A_1B_1 מאונכים: הם מקבילים לחוצי הזוויות של הזוויות שנוצרות בין שני המשיקים. נבנה מעגל η שקוטרו A_1A_2, ומעגל ζ שקוטרו B_1B_2. אז T נמצא על ζ

ועל η. דרגת O_i ביחס ל- ζ ול-η שווה לרדיוס של מעגל i. ובכן, שלוש הנקודות T, O_2, O_1 נמצאות על הציר הרדיקלי של ζ ושל η, כלומר על ישר אחד.

נסיים את פתרון השאלה. הישרים AD, BC הם המשיקים הפנימי והחיצוני של העגלים β,γ. כאשר נחבר את שתי נקודות ההשקה שיש על אותו המעגל, נקבל ישר שעובר דרך I לפי הלמה של סאוואימה. שני מעגלים נותנים שני ישרים כאלה, ו-I זו נקודת מפגש של שני הישרים, לכן I נמצא על קו המרכזים של β,γ לפי טענה 2. מש"ל.



פתרון שני (עמרי מרכוס)**.** נבצע אינברסיה ביחס למעגל שמרכזו ב-I. לאחר האינברסיה, נקודות A, B, C תעבורנה לנקודות 'A', 'B', 'C' והישרים AB, BC, CA תעבורנה למעגלים 'IB'C', IC'A', IA'B, שהם באותו גודל, הרי הישרים היו באותו המרחק מ-I. נתבונן בתמונה הזאת עם 3 מעגלים שווים. נגיד שהקטרים של המעגלים הם IA_1 (של 'IB'C), ובדומה IB_1, IC_1. אז I הוא מרכז המעגל החוסם את $A_1B_1C_1$, ומצד 'IA מאונך גם ל-$A'B_1$ וגם ל-$A'C_1$, לכן 'IA הוא האנך האמצעי של B_1C_1. כלומר 'A'B'C הוא משולש האמצעים של $A_1B_1C_1$, כלומר פי 2 יותר קטן וצלעות מתאימות מקבילות. לכן הישר 'IA מאונך ליש 'B'C, ומטענות דומות רואים כי I הוא מפגש הגבהים של 'A'B'C. בנוסף, מכיוון שמשולשים 'A'B'C ו-$A'B'C_1$ חופפים, אז המעגל 'A'B'C הוא גם באותו גודל כמן המעגל 'IA'B.



כעת נצייר ציור לאחר האינברסיה:

בציור יש מעגלים 'A'B'C (אדום בציור) שאליו עבר המעגל ABC, שמרכזו יסומן K, והמעגל B'C'I שאליו עבר הישר BC (סגול בציור), שמרכזו יסומן L; הרדיוסים של שני מעגלים אלה שווים ויסומנו r_1 (קטעים ירוקים בציור). מעגל חשוב נוסף (כתום בציור) זה תמונה לאחר אינברסיה של הישר AD, מרכזו יסומן M; רדיוסו יסומן r_2. מה שמגדיר א התמונות β',γ' של מעגלים β,γ לאחר האינברסיה זה שהם צריכים להשיק בו זמנית למעגלים אדום, סגול וכתום (לא קשה להבין באיזה קשתות).

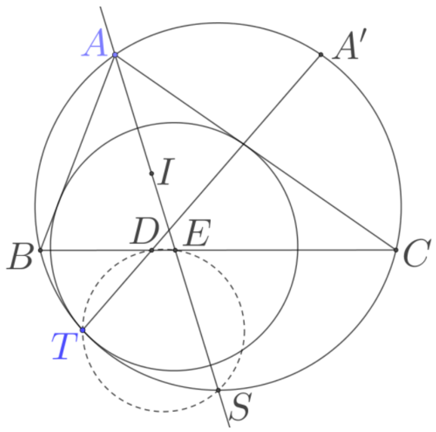
מרכז של כל מעגל זז לאחר אינברסיה, אבל הישר שמחבר את מרכז המעגל למרכז אינברסיה לא זז. לכן מספיק להוכיח, שהישר שמחבר את I למרכזים של β' ושל γ' הוא אותו ישר. אנו נוכיח טענה חזקה יותר: שלמעגלים β',γ' יש מרכז משותף, ומרכז זה הוא נקודה N, עבורה MILN מקבלית.

מכיוון שהמעגל אדום וסגול הם באותו גודל, אז ניתן להעביר אחד לשני באמצעות שיקוף ביחס לישר B'C' או הזזה במאונך ל-B'C'. הזזה זו תעביר את K ל-L ואת A' ל-I, ולכן KA' מקביל ושווה ל-LI, לכן ILKA' מקבילית. את נקודת מפגש שנייה של A'I עם המעגל האדום נסמן J. הטלה של M לקטע AI חוצה אותו, הרי AMI שווה-שוקיים (הרי MA ו-MI רדיוסים של אותו מעגל). הישר B'C' חוצה את IJ עקב סימטריה. לכן המרחק מ-M ל-B'C' שווה למחצית A'J. מצד שני, גם התלה מ-K על A'J חוצה אותו (הרי גם A'KJ שווה-שוקיים). לכן הטלה של A'K לישר AI שווה למרחק מ-M לישר. לפי הגדרה של N, הווקטורים MN, IL, A'K שווים (הקטעים הירוקים בציור). לכן, היות והטלה של A'K לישר AI שווה למרחק מ-M ליש B'C', אז הנקודה N נמצאת על B'C'. זה כבר אומר שמעגל עם מרכז ב-N משיק למעגל אדום אך ורק כשהוא משיק למעגל סגול (עקב סימטריה יחסית ל-B'C'). המרחק מ-N לנקודות K, L שווה ל-MI שזה r_2. לכן בשביל שמעגל שמרכזו N ישיק למעגל האדום והסגול, צריך שהפרש הרדיוסים או סכום הרדיוסים יהיה שווה למרחק בין המרכזים, כלומר שרדיוס המעגל יהיה $r_2 \pm r_1$. בדיוק בשני המקרים האלה המעגל ישיק גם למעגל הכתום, הרי $\mathrm{MN} = r_1$.

אנו משאירים כתרגיל לקורא לבדוק שהמעגלים שמרכזם ב-N משיקים למעגלים בקשתות הנכונות (שמתאימות לפנים הקטעים ולא לחלק החיצוני לפני האינברסיה).

1. יהי ABC משולש ו- Ω המעגל החוסם שלו. מעגל חצי-חסום ω משיק לקשת BC בנקודה T, וגם לצלעות AB ו-AC. נתונה גם נקודה S כך ש- CBTS טרפז שווה-שוקיים. הנקודה D היא נקודת המפגש של BC עם AS. הראו שהמעגל החסום מבחוץ של משולש ABC עובר בנקודה D.

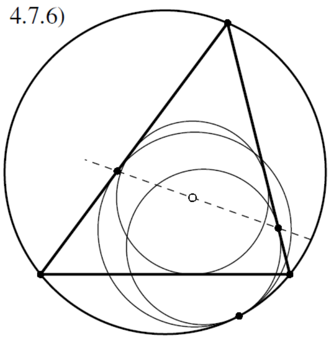
פתרון. נעשה אינברס-שיקוף אם מרכז ב-A שמחליף בין B ל-C. נקודה T עוברת לנקודת השקה של מעגל חסום מבחוץ לצלע BC שיסומן 'D. נראה שזו נקודה D. מתקיים $\sphericalangle BAT=\sphericalangle CAD'$. מצד שני $\sphericalangle BAT=\sphericalangle CAS$. ולכן $D=D'$.



2. יהי ABC משולש ו- Ω המעגל החוסם שלו. מעגל חצי-חסום ω משיק לקשת BC בנקודה T, וגם לצלעות AB ו-AC. נסמן ב- S את אמצע הקשת BC, ב- D את נקודת ההשקה של המעגל החסום בשולש ABC לצלע BC, וב- E את נקודת המפגש של חוצה הזוית של A עם הצלע BC. הוכיחו כי המרובע STDE חסום במעגל.

פתרון. משיקוף של השאלה הקודמת ביחס לאנך האמצעי של BC נובע שהנקודות 'TDA נמצאות על ישר אחד. אז $\sphericalangle STD=\sphericalangle STA'=\sphericalangle SCA=\sphericalangle BEA=\sphericalangle DEA$ ולכן יש מעגל.

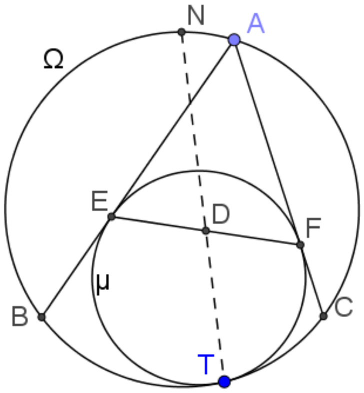
4.7.6)



3. הוכיחו גרסה כללית של הלמה של ורייר בתמונה.

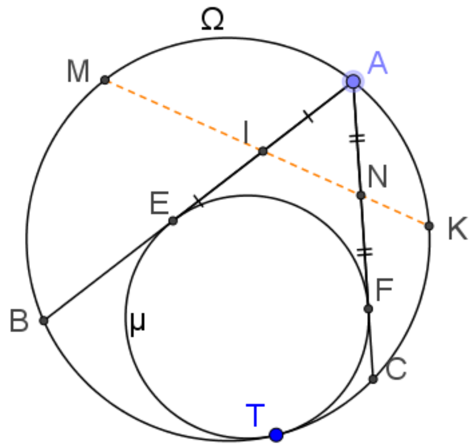
(הוכחת ורייר עם פסקל עובדת)

4. משולש ABC חסום במעגל Ω. מעגל μ משיק לצלעות AC ו-AB בנקודות E ו-F, ומשיק גם ל-Ω מבפנים בנקודה T. נקודה N היא אמצע הקשת BAC. הראו כי הישר TN עובר דרך אמצע EF.



פתרון. נבצע את אותו האינברסשיקוף האגדי. N על חוצה הזווית החיצוני ותתעבר ל-'N שהוא מפגש של חוצה זווית החיצוני של A עם BC, D תעבור למרכז המעגל החסום מבחוץ J (כי D=I לפי ורייר), ו-T תעבור ל-S – נקודת ההשקה של המעגל החסום מבחוץ ל-BC.

רוצים A, S, 'N, J יהיו על מעגל אחד וזה מעגל שקוטרו 'JN.

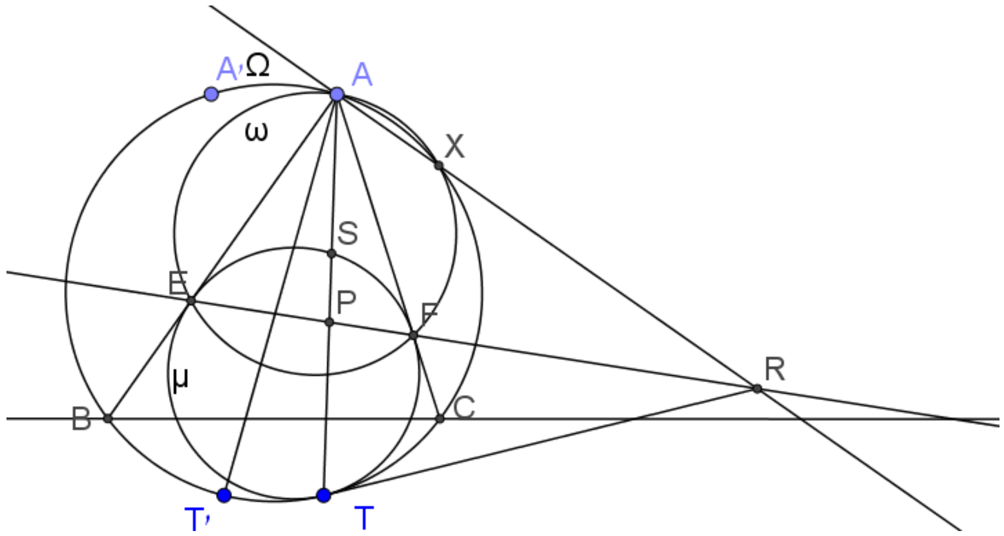


5. משולש ABC חסום במעגל Ω. מעגל חצי-חסום ω משיק לצלע AB בנקודה J, לצלע AC בנקודה P, וגם לקשת BC. אמצעי הקשתות AB ו-AC (במעגל Ω) הן M ו-K בהתאמה. האמצעים של AJ ו-AP הם I ו-N. הראו שהנקודות K, N, I, M על ישר אחד.

פתרון. מהומותטיה K, F, T על ישר. דמיון משולשים או אינברסיה מ-K מראה כי

$KF \cdot KT = KA^2$ ולכן דרגה של K ביחס ל-μ ול-A זהה. ולכן הציר הרדיקלי עובר בנקודות K, N, I, M.

6. במשולש ABC המעגל החוסם הוא Ω ומרכז המעגל החסום I. נקודה M היא אמצע הצלע BC. האנך ל-AI דרך I פוגש את הצלעות AB ו-AC בנקודות F ו-E בהתאמה. נניח כי המעגל החוסם של משולש AEF פוגש את Ω בנקודה X השונה מ-A. מעגל חסום מבחוץ של ABC משיק לצלע BC בנקודה Z ומשיק גם להמשכי הצלעות AB ו-AC. הראו כי הישרים AZ ו-XM נפגשים על Ω.

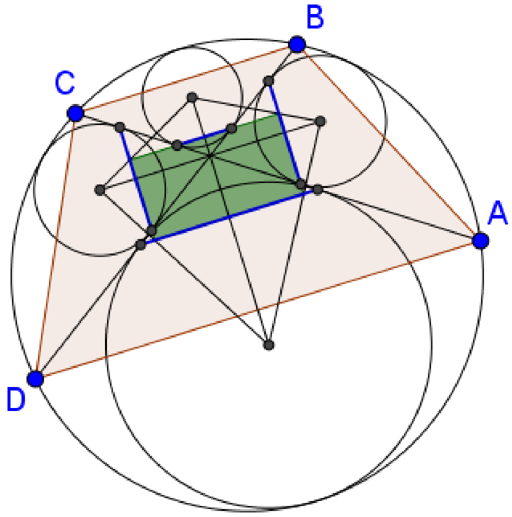


פתרון.

א. יהי R המרכז הרדיקלי של Ω, ω, ו- μ. המרובע SFTE הרמוני, ולכן אם נטיל דרך T נקבל שהרביעייה (R,P;F,E) גם הרמונית. נטיל דרך A ונקבל שהמרובע BXCT הוא הרמוני. זה שקול לכך ש- 'XT עובר דרך אמצע BC. דרך אחרת לקבל שהמרובע הרמוני היא האינוורסיקוף מ-A.

ב. הטענה נובעת מפסקל $\begin{pmatrix} X & T & P' \\ A' & P & T' \end{pmatrix}$, או ממשפט הפרפר שכנפיו AP ו-XT'.

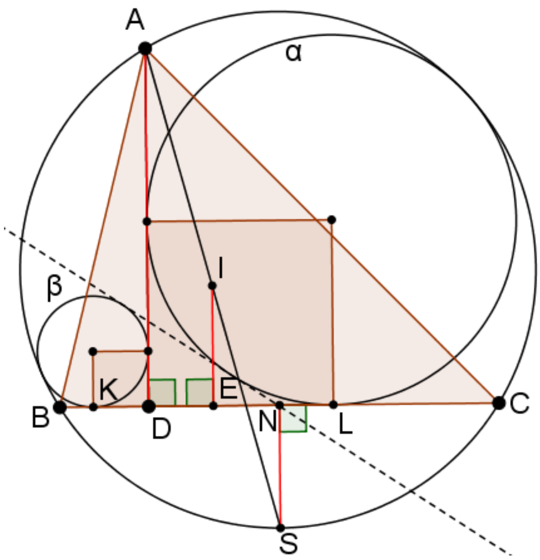
7. מרובע ABCD חסום. הראו שמרכזי המעגלים החסומים במשולשים ABC, BCD, CDA, DAB יוצרים מלבן.



פתרון. לפי סווימה ותבו, מרכזי מעגלים חסומים נמצאים על מיתרים כחולים (או המשיכהם) של המעגלים החצי-חסומים, שמקבילים לחוצי זוויות של AC ו-BD ומכאן המלבן.

כמסקנה מקבלים את המשפט היפני.

8. משולש חד-זוויות ABC חסום במעגל Ω, והקטע AD הוא גובה. מעגלים α ו-β משיקים ל-Ω מבפנים, ל-BC ול-AD. הראו שהמשיק הפנימי המשותף של α ו-β השונה מ-AD עובר באמצע של BC אם ורק אם $AB + AC = 2 \cdot BC$.



פתרון. ישנה למה, לפיה בהינתן נקודות R ו- S על הצלעות AB ו- AC בהתאמה, התנאי $BR + CS = BC$ שקול לכך שהמעגל ARS עובר דרך מרכז המעגל החסום במשולש. לכן התנאי $AB + AC = 2BC$ שקול לכך ש-A, אמצעי הצלעות AB ו- AC, ו- I (מרכז המעגל החסום) על מעגל. זה שקול לכך ש $\sphericalangle AIO = 90^\circ$. אם נסמן את אמצע הקשת BC ב- S, אז התנאי שקול לכך ש I הוא אמצע AS. אם נטיל על הצלע BC, נקבל שזה שקול לכך ש- E הוא אמצע DN.

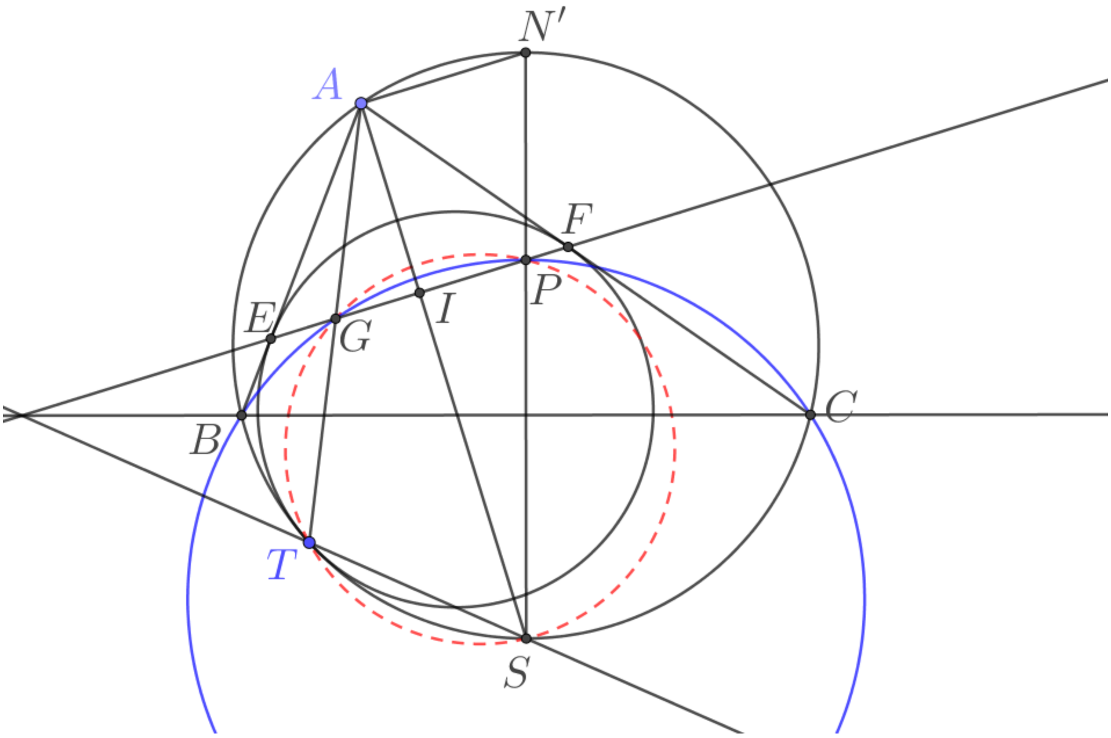
בגלל סאוואימה KIL משולש ישר זווית ושווה שוקיים, ואז E זה אמצע KL. תהא N' חיתוך המשיק השני עם הצלע BC, ו-X מפגש המשיקים הפנימיים. ולפי חשבון משיקים (מעגלים חסומים מבחוץ) במשולש PN'X נקבל $KD = N'L$. ולכן E אמצע DN' (תמיד).

9. במשולש ABC המעגל החוסם Ω והמעגל החצי-חסום ω משיקים בנקודה T על הקשת BC. נקודות השקה של ω עם הצלעות AC ו-BC הן E ו-F בהתאמה. הקטעים EF ו-AT נפגשים ב-G. הראו כי BG ו-CG יוצרים זוויות זהות עם EF.

פתרון. מעגל BGC חותך את FE ב-G וב-P. נרצה להראות כי P על האנך האמצעי.

S ו-N הן אמצעים של קשתות BC על Ω (כש-N על הקשת שמכילה את A).

טענה. GPST חסום.



כדי להוכיח את זה מספיק להראות כי EF, BC ו-ST נפגשים.

מנלאוס אומר, שהישר EF פוגש את BC בנקושה U, המאופיינת על ידי היחס $\frac{BF}{CE}=\frac{BU}{CU}$. היינו שמחים להגיד דבר דומה גם על ישר ST, שהוא חוצה הזווית החיצוני של BTC, שהוא חותך. בנקודה V עבורה $\frac{BT}{CT}=\frac{BV}{CV}$. כלומר על מנת להוכיח את הטענה צריך להוכיח את הזהות $\frac{BT}{CT}=\frac{BF}{CE}$. לפי שאלה 5 המרובע BTCX הרמוני (X מוגדר כמו בשאלה 5) ולכן מה שצריך להראות זה $\frac{BX}{CX}=\frac{BF}{CE}$. אבל לפי למת ההעתקה הספירלית, XFE דומה ל-XBC. לכן XFB דומה ל-XEC, וזה נותן את היחס.

נסיים את השאלה.

נסמן את נקודת המפגש של SP עם Ω ב-'N. אז ST אנטי-מקביל ל-GP ביחס לישרים GT ו-PS. בנוסף N'A אנטי מקביל ל-ST ביחס לאותו זוג ישרים. לכן 'AN מקביל ל-EF. לכן גם N'=N, וזה אומר ש-Y הוא על האנך האמצעי של BC.