תרגיל התלתן

1. (IMO 2006) יהי I מרכז המעגל החסום במשולש ABC. תהי P נקודה בתוך המשולש המקיימת $\sphericalangle PBA + \sphericalangle PCA = \sphericalangle PBC + \sphericalangle PCB$. הראו כי $AP \ge AI$, וכי שוויון מתקיים אם ורק אם $P = I$.

2. במשולש ABC מרכז המעגל החסום הוא I ומרכזי המעגלים החסומים מבחוץ הם I_a, I_b, I_c. בטאו את $I_aI^2 + I_bI_c^2$ באמצעות R - הרדיוס של המעגל החוסם.

3. על הקטע BC נמצאת נקודה T. נקודה X נמצאת על האנך ל-BC בנקודה T, כך שהזווית $\sphericalangle BXC$ קהה. נקודות F ו-E הם השיקופים של T ביחס לישרים XB ו-XC. מרכז המעגל החוסם של BXC הוא O. הראו כי $\sphericalangle OFB = \sphericalangle OEC$.

4. הכלילו את נוסחת אוילר למקרה של מעגל חסום מבחוץ: $OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a$.

5. BC הוא קוטר של מעגל שמרכזו O. A היא נקודה כלשהי על המעגל המקיימת $\sphericalangle AOC > 60^\circ$. המיתר EF הוא האנך האמצעי של AO. D היא אמצע הקשת AB (הקצרה). הישר דרך O שמקביל ל-AD פוגש את AC בנקודה J. הוכח כי J הוא מרכז המעגל החסום של CEF.

6. נתונים שני מעגלים, אחד בתוך השני. מנקודה C על המעגל החיצוני מעבירים משיקים למעגל הפנימי, שחותכים שנית את המעגל החיצוני בנקודות A ו-B. מצאו את המקום הגיאומטרי של מרכז המעגל החסום של משולש ABC (כשהנקודה C זזה על המעגל).

7. נקודות K ו-L נמצאות על הקשתות AB ו-BC של המעגל החוסם של ABC, כך ש-AC מקביל ל-KL. נסמן את מרכזי המעגלים החסומים של ABK ו-CBL באמצעות I ו-J. תהא N אמצע הקשת ABC. הראו כי NI שווה ל-NJ.

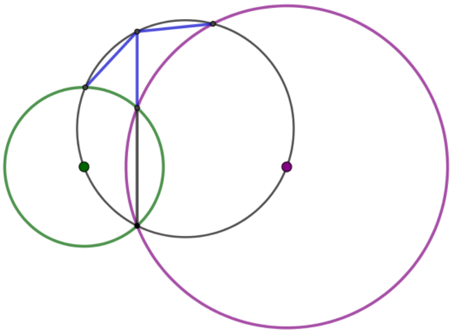
8. משולש ABC חסום במעגל. יהיו P ו-Q אמצעי הקשתות מול A ו-B בהתאמה. הישר P, Q חותך את הצלעות AC ו-BC בנקודות U ו-V. יהיה I מרכז המעגל החסום במשולש ABC. הוכיחו כי CUIV מעוין.

9. פתרו באמצעות הטענה של שאלה 5 את שאלת החולצה האדומה:
נתון משולש ABC. קודקודיו מחלקים את המעגל החוסם ל-3 קשתות, ואמצעי הקשתות הללו יסומנו P, Q, R (של BC, AC, AB בהתאמה). הקטע PQ חותך הקטע BC ב-U ואת הקטע AC ב-V. הקטע QR חותך את הקטע AC ב-W ואת AB ב-X. הקטע PR חותך את הקטע AB ב-Y ואת הקטע BC ב-Z.
הוכיחו כי UX, VY, WZ נפגשים בנקודה אחת.

בתיאבון!

10. משולש ABC חסום במעגל S. אמצעי הקשתות AB, CA, BC הם P, Q, R בהתאמה. יהיו S_1, S_2, S_3 מעגלים שמרכזיהם P, Q, R בהתאמה ושמשיקים לישרים AB, CA, BC בהתאמה. הוכיחו שניתן לבחור משיק חיצוני משותף לכל זוג מעגלים מבין S_1, S_2, S_3, כך ששלושת המשיקים יפגשו בנקודה אחת.

11. מרובע $ABCD$ חסום במעגל. הראו כי מרכזי המעגלים החסומים במשולשים ABC, ABD, ACD, BCD הם קודקודי מלבן.



12. הוכיחו שהקטעים הכחולים בציור שווי אורך.