תרגיל 8-שיטת הקיצוני

1. נתון גרף מלא, כיוונו את כל הקשתות שלו. הוכיחו כי ניתן לבחור קודקוד v כך שמכל קודקוד אחר יש מסלול מכוון ל-v באורך 2 לכל היותר.

פתרון: נבחר קודקוד m עם דרגת כניסה מקסימלית ונטען ש-m מקיים את תנאי השאלה. לכל קודקוד v בגרף או שיש קשת מ-v ל-m או שיש קשת מ-m ל-v, אם יש קשת מ-v ל-m אז v במרחק מכוון אחד מ-m, נקרא לקודקודים האלה שמחים. אם יש קשת מ-m ל-v ואין קשת מ-v לקודקוד שמח אז מכל קודקוד שמח יש קשת ל-v וגם מ-m ולכן דרגת הכניסה של v גדולה מדרגת הכניסה של m בסטירה, לכן המרחק המכוון מכל קודקוד ל-m הוא לכל היותר 2.

2. הוכיחו כי בכל מצולע קמור ניתן למצוא 3 קודקודים רצופים A, B, C כך שהמעגל החוסם של ABC מכיל את המצולע.

פתרון: נסתכל על שלשות של קודקודים של המצולע (לא בהכרח רצופים) ונבחר את השלישיה שהמעגל החוסם שלה בעל הרדיוס המקסימלי.

ברור שהמעגל הזה מכיל את כל קודקודי המצולע, אכן אם יש קודקוד A' מחוץ למעגל החוסם של ABC אז המעגל החוסם של $A'BC$ גדול יותר (הנחנו שהמרובע $ABCA'$ קמור).

נשאר לשים לב שהמעגל המקסימלי חייב לעבור דרך 3 קודקודים רצופים.

נניח שבין B ל-C יש דקודוד A' של המצולע שנמצא בתוך המעגל המעגל המקסימלי אז המעגל החוסם של $A'BC$ גדול מהמעגל המקסימלי בסתירה.

3. בעיר רחוקה שלושה בתי ספר ובכל אחד מהם לומדים n תלמידים. כל תלמיד מכיר $n+1$ תלמידים משני בתי הספר שבהם הוא לא לומד. הוכיחו כי ניתן לבחור תלמיד אחד מכל אחד מבתי הספר כך ששלושתם יכירו זה את זה.

פתרון: נבחר את התלמיד שיש לו הכי הרבה היכרויות מבית ספר אחד, נקרא לו מקסים ונניח שהוא מבית הספר הראשון ומכיר k תלמידים מבית הספר השני (k זה המקסימום בחרנו). נסתכל על אחד התלמידים מבית הספר השלישי שמקסים מכיר אם הוא מכיר את אחד מבין k החברים של מקסים מבית הספר השני אז ניצחנו, אחרת הוא מכיר לכל היותר $n-k$ תלמידים מבית הספר השני כלומר לפחות $k+1$ תלמידים מבית הספר הראשון, בסטירה למקסימליות של מקסים.

4. באוניברסיטה יש 999 פרופסורים, לכל שניים מביניהם יש נושא משותף יחיד ששניהם מתעניינים בו ובכל נושא מתעניינים בדיוק שלושה פרופסורים. הוכיחו כי ניתן לבחור 250 נושאים כך שכל אחד מבין הפרופסורים יתעניין בנושא אחד לכל היותר.

פתרון: נגיד ששני נושאים נחתכים אם יש פרופסור שמתעניין בשניהם. נבחר קבוצה מקסימלית של נושאים שלא נחתכים, נגיד שבקוצה הזו יש m נושאים, נקרא לנושאים האלו חשובים, כלומר יש $3m$ פרופסורים המתעניינים בנושאים חשובים, נקרא להם מקצועיים, ו-$999-3m$ פרופסורים שלא מתעניינים בנושאים האלו. נשים לב שלכל שני פרופסורים לא מקצועיים, הפרופסור השלישי שמתעניין בנושא המשותף של השניים הראשונים חייב להיות מקצועי אחרת הינו יכולים להגדיל את קבוצת הנושאים החשובים.

נתבונן בנושאים שיש פרופסור מקצועי אחד שמתעניין בהם ושני פרופסורים לא מקצועיים, נקרא לנושאים כאלו מגניבים.

נשים לב שלכל שלישייה של פרופסורים מקצועיים: אנדרה, בלז וגוטפריד נושא מגניב שבלז מתעניין בו חייב להיחתך עם נושא מגניב שאנדרה מתעניין בו אחרת הינו הופכים את הנושאים המגניבים של בלז ושל אנדרה לנושאים חשובים ומוצאים קבוצה יותר גדולה מהקבוצה המקסימלית.

מהטיעון הזה נוכל להסיק שכל נושא חשוב נחתך עם לכל היותר $\frac{999-3m}{2}$ נושאים מגניבים. אכן אם נחזור לשלישיית המקצוענים שלנו אז אם רק אנדרה מתעניין בנושאים מגניבים ובלז וגוטפריד לא אז השלישיה הזו יכולה להיחתך עם לכל היותר $\frac{999-3m}{2}$ נושאים מגניבים ואם גם בלז וגם אנדרה מתעניינים בנושאים מגניבים אז אם אנדרה מתעניין בשלושה נושאים מגניבים אז נושא מגניב שבלז מתעניין בו חייב להחתך עם שלושת הנושאים של אנדרה וזה לא הגיוני ולכן יכול להיות לכל היותר 6 נושאים מגניבים שנחתכים עם השלישיה שלנו, נשאר רק לציין שאם כל אחד מהשלישייה מתעניין בנושא מגניב אחד לכל היותר זה ייתן רק שלושה נושאים מגניבים. כמובן גם שהמקרה המעניין הוא כאשר $6 > \frac{999-3m}{2}$ כי אחרת m גדול והכל שמח.

סך הכל הוכחנו שכל אחד מבין m הנושאים החשובים נחתכך עם לכל היותר $\frac{999-3m}{2}$ נושאים מגניבים ולכן יש לכל היותר $m \cdot \frac{999-3m}{2}$ נושאים מגניבים אבל יש בדיוק $\binom{\frac{999-3m}{2}}{2}$ נושאים מגניבים, ולכן

כלומר: $m \geq 998 - 3m$ ולכן $m \geq 249.5$ שזה בדיוק מה שרצינו.

5. כמה צריחים צריך להציב על משבצות של קובייה עם צלע באורך n כך שכל משבצת תאוים על ידי צריך אחד לפחות (צריך מאיים גם על המשבצת שעליה עומד).

פתרון: נפתור תחילה את השאלה בהנחה שאסור לשני צריחים לאיים זה על זה (אינטואיטיבית זה רק יגדיל את כמות הצריחים הדרושים).

נתבונן במישור שכמות הצריחים העומדים בו היא מינימאלית, נניח שזה מישור אופקי ושבמישור הזה עומדים m צריחים. במישור שלנו יש $(n-m)^2$ משבצות שלא מאוימות על ידי m הצריחים ולכן נצטרך להעמיד עוד לפחות $(n-m)^2$ צריחים מעל או מתחת למשבצות הלא מאוימות במישור שלנו.

כעט נתבונן במישורים אנכיים שהולכים לתוך הקובייה (מקבילים ל-xz) ושעוברים במשבצות שבהן עומדים צריחים במישור שבחרנו. יש m

מישורים כאלו, הם לא נחתכים ולא מכילים את $(n-m)^2$ המשבצות שבהן עומדים צריחים המאיימים על המשבצות הלא מאוימות במישור אופקי. בנוסף בכל אחד מבין m המישורים האלו חייבים להיות לפחות m צריחים מכיוון שבחרנו את המישור שבו היה הכי מעט צריחים.

סך הכל מצאנו $m^2+(n-m)^2$ צריחים, הביטוי הזה מקבל מינימום כאשר $m=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ ולכן לא נצליח בפחות מ- $\left\lceil\frac{n^2}{2}\right\rceil$ צריחים.

כעת נבדוק מה היה משתנה אם היינו מרשים לצריחים לאיים זה על זה.

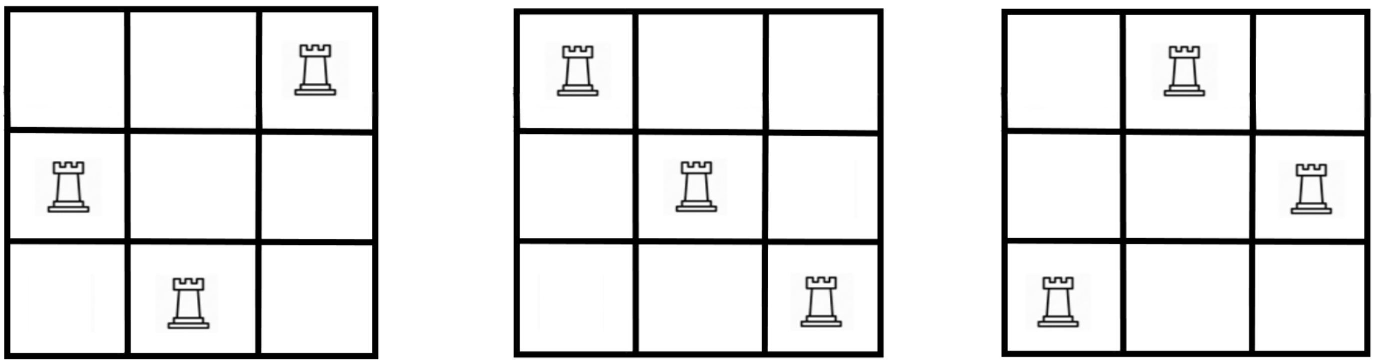
במקום לקחת את המישור עם כמות מינימלית של צריחים נבחר את המישור עם כמות מינימלית של שורות או עמודות שבהן עומד צריח אחד לפחות. נניח שבמישור הזה כמות השורות עם צריחים קטנה מכמות העמודות עם צריחים ונסמן את כמות השורות התפוסות ב-m.

במישור שבחרנו יש לפחות $(n-m)^2$ משבצות שצריכות להיות מאוימות ממישורים אחרים ולכן כבר מצאנו $(n-m)^2$ צריחים. בנוסף לכל שורה במישור שלנו שיש בה צריח נסתכל על המישור שמכיל את השורה הזו ומאונך למישור שלנו, במישור הזה יש לפחות m שורות או m עמודות עם צריחים ולכן במישור הזה יש לפחות m צריחים, יש m מישורים כאלו ולכן קיבלנו בדיוק את אותו החסם כמו מקודם: $\left\lceil\frac{n^2}{2}\right\rceil$.

דוגמה: נבנה קובייה בגודל $k\times k\times k$ ובה k^2 צריחים שלא מאיימים זה על זה, נעמיד צריך בכל משבצת שבה סכום הקואורדינאטות יתחלק ב-k (בכל ציר הקואורדינטות יהיו מ- 0 עד $k-1$).

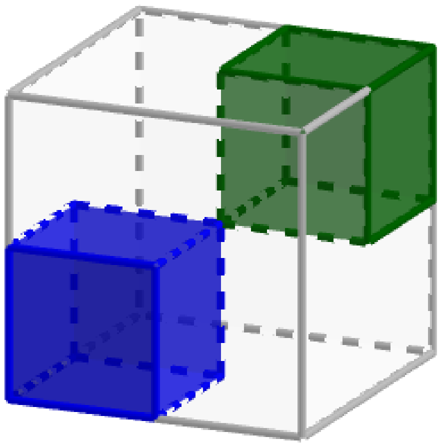
לדוגמה עבור $k=3$ הקובייה תראה כך:

שכבה 0   שכבה 1   שכבה 2



נשים לב שבכל מישור (בכל כיוון) בקובייה הזו עומדים בדיוק שלושה צריחים, אחד בכל שורה ואחד בכל עמודה כלומר מכל כיוון שנסתכל על הקובייה הזו יאיימו אלינו 9 צריחים.

נבנה שתי קוביות מהסוג שתיארנו אחת בגודל $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ (הכחולה) ונשים אותה בפינה השמאלית התחתונה של הקובייה הגדולה ואחת בגודל $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ (הירוקה) ונשים אותה בפינה הימנית העליונה של הקובייה הגדולה כפי שמתואר באיור למטה. כל משבצת בקובייה הגדולה "רואה" צריח אחד לפחות (בעצם בדיוק) מכיוון שכל משבצת רואה או את הקובייה הכחולה או את הירוקה ומהבנייה שלהן נראה גם צריח.



בדוגמה הזו השתמשנו ב- $\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2$ צריחים שזה בדיוק מה שקיבלנו בחסם.

6. מעגל בגרף נקרא חסר מיתרים אם כל שני קודקודים לא צמודים במעגל לא מחוברים. ידוע שבגרף מתקיים התנאי: לכל מעגל חסר מיתרים וקודקוד v בגרף, v מחובר לכל היותר קודקוד אחד מהמעגל. הוכיחו כי הגרף 3-צביע.

פתרון: אחד התריקים השכיחים בשאלות שבהן מבקשים להוכיח שגרף k-צביע הוא להוכיח שקיים קודקוד מדרגה $k-1$ לכל היותר ואז לסיים באינדוקציה: נוריד את הקודקוד מדרגה $k-1$ מהגרף, מטענת האינדוקציה הגרף שנשאר k-צביע, נוסיף את הקודקוד שהורדנו ומפני שיש לו רק $k-1$ שכנים יהיה צבע שאף אחד מהשכנים שלו לא משתמש בו ואז נצבע את הקודקוד שלנו בצבע הזה וננצח.

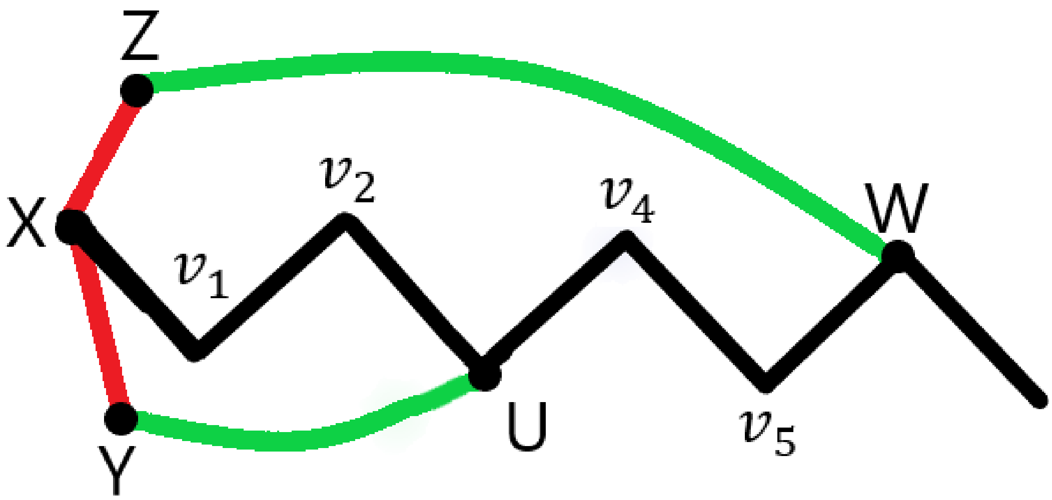
לפיכך השאלה היא להוכיח כי קיים קודקוד מדרגה 2 לכל היותר.

נגדיר מסלול חסר מיתרים להיות קבוצת קודקודים $v_1, \dots, v_n$ כך ש-v_i מחובר ל-v_j אם ורק אם $|i-j|=1$. נבחר את המסלול חסר המעגלים מהאורך המקסימאלי ונקרא לקודקוד הראשון בו x.

נניח בשלילה כי כל קודקוד בגרף מדרגה שלוש לפחות ולכן ל-x צריכים להיות לפחות שני שכנים שהם לא במסלול שלנו, נקרא להם y, z.

מהמקסימליות של המסלול נקבל של-y ול-z צריך להיות שכן במסלול (חוץ מ-x), אחרת היינו יכולים להוסיף אותו למסלול.

נסתכל על כל השכנים של y, z במסלול, נסמן את השכן הראשון (עם האינדקס המינימלי) של y ב-u ולשכן הראשון של z נקרא w. בנוסף נניח



כי u בא לפני w במסלול.

קיבלנו מעגל $x, v_1, v_2, \dots, u, \dots, w, z, x$. המעגל הזה חסר מייתרים מכיוון ש-$x, \dots, w$ זה חלק מהמסלול שלנו שביקשנו שיהיה חסר מיתרים ו-z לא מחובר לשוב דבר באמצע כי בחר את w להיות השכן הראשון של z. אבל נשים לב ש-y מחובר גם ל-x וגם ל-u בסתירה לנתון ולכן חייב להיות קודקוד מדרגה שתיים לכל היותר וניצחנו!