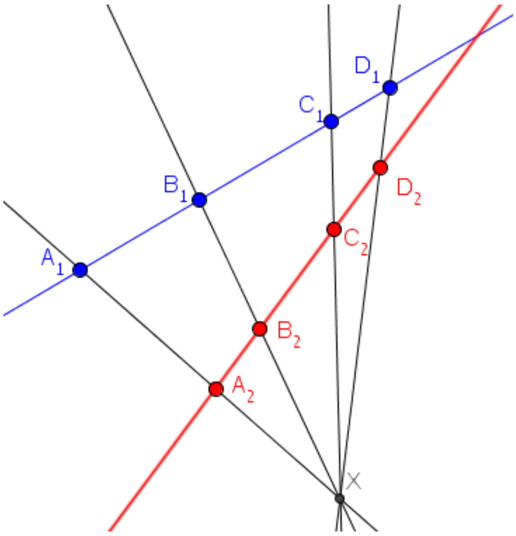
תזכורת על טענות שימושיות:

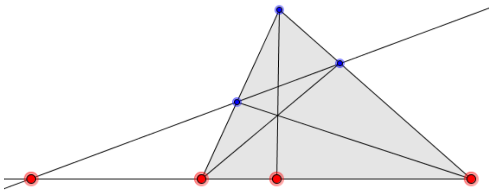


1. **הגדרה:** יחס כפול של 4 נקודות על ישר מוגדר כך: $[A,B;C,D]=\frac{AC}{BC}\Big/\frac{AD}{BD}$, כאשר היחס הוא בקטעים מכוונים. (הערה – יש חשיבות לסדר).
הטלה שומרת יחס כפול:
$$[A_1,B_1;C_1,D_1]=[A_2,B_2;C_2,D_2]$$

2. כאשר היחס הכפול שווה -1 הרביעייה נקראת **רביעייה הרמונית**.
קצוות הקטע, אמצע הקטע והנקודה האינסופית זו דוגמה ראשונה לרביעייה הרמונית.

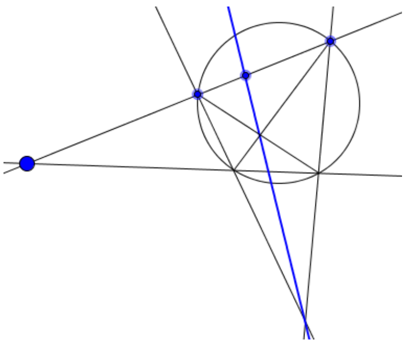
3. יחס כפול של רביעיית ישרים $[OA,OC;\,OB,OD]$ שעוברים בנקודה O זה יחס כפול של נקודות חיתוך שלהם עם ישר חמישי כלשהו לא דרך O (מסתבר שזה לא תלוי בבחירת הישר). בדומה מוגדרת רביעייה הרמונית של ישרים.

4. בהינתן שניונית S שעוברת בנקודות A, B, C, D לכל נקודה נוספת O על S היחס הכפול $[OA,OC;\,OB,OD]$ הוא אותו דבר (לא תלוי בבחירת O). לכן באופן טבעי מוגדר היחס הכפול של 4 נקודות על השניונית. כאשר היחס הוא -1 המרובע נקרא **מרובע הרמוני**. ניסוח שקול הוא שהמשיקים בקודקודים A ו-C נפגשים על הישר BD; ניסוח שקול אחר, במקרה של מעגל, זה ש- $AB\cdot CD=BC\cdot DA$. דוגמה פשוטה למרובע הרמוני היא דלתון חסום.



5. משילוב של משפטי צ'בה ומנלאוס מקבלים רביעייה הרמונית.

6. דואליות ביחס למעגל שמרכזו O: הישר p דואלי לנקודה P שאינברסית ביחס למעגל לעקב האנך מ-O ל- p. דואליות מחליפה בין נקודות לישרים, בצורה שהופכת קשר של הכלה.



7. הנקודות הכחולות בציור הן רביעייה הרמונית, והנקודה הכחולה מחוץ למעגל דואלית לישר הכחול.
מכאן **משפט ברוקר:** אם במרובע ABCD שחסום במעגל שמרכזו O האלכסונים נפגשים בנקודה X, זוגות הישרים של הצלעות הנגדיות נפגשים בנקודות Y ו-Z, אז במשולש XYZ הגבהים נפגשים בנקודה O.

8. משפט פויירבאך: בכל משולש מעגל תשע הנקודות משיק למעגל החסום. נקודת ההשקה נקראת נקודת פויירבאך.