24/6/2019 **מחנה קיץ** כ"א בסיוון תשע"ט

קבוצת דן

אין להשתמש במחשבון

1. בפארק יש מספר שבילים, כאשר כל שביל הוא מעגל מלא (ולא חלק ממעגל). ניתן להגיע לאורך השבילים מנקודה A לנקודה B שנמצאת במרחק 100 מטר ממנה. מהו האורך הכולל הקטן ביותר האפשרי של השבילים בפארק?

2. 20 נורות מסודרות במעגל. בהתחלה, 19 מהן דולקות, ואחת כבויה. בכל שלב אור בוחר 8 נורות רצופות ומחליף את מצבה של כל אחת מהן. אור ביצע כמה מהלכים שכאלה, ובסופם היו 19 נורות דולקות. איזו מהנורות יכולה להיות הנורה הכבויה?

3. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך שלכל שני ממשיים x ו- y מתקיים

$$f\left(x+y^4\right)+f\left(x^3\right)=f\left(y^2\right)$$

4. מצא את כל הפתרונות בשלמים חיוביים (לא כולל 0) למשוואה:

$$l^{42}+i^{42}+f^{42}+e^{42}=902^{42}$$

בהצלחה!

24/6/2019 **מחנה קיץ** כ"א בסיוון תשע"ט

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך שלכל שני ממשיים x ו-y מתקיים

$$f\left(x+y^4\right)+f\left(x^3\right)=f\left(y^2\right)$$

2. מצא את כל הפתרונות בשלמים חיוביים (לא כולל 0) למשוואה:

$$l^{42}+i^{42}+f^{42}+e^{42}=902^{42}$$

3. על המעגל החוסם של המשולש ABC מסומנת נקודה P. נקודה X מסומנת במישור ומקיימת שהמעגלים החוסמים של PBX ו-PCX משיקים לישרים AB ו-AC בהתאמה. השיקופים של P ביחס לישרים AB ו-AC יסומנו ב-D ו-E בהתאמה. הוכיחו כי השיקוף של הישר DE ביחס לישר BC מאונך לישר PX.

4. האם ניתן לצבוע את המספרים השלמים החיוביים במספר סופי של צבעים כך שלא כל המספרים יהיו באותו צבע, כך שאם $a<b$ וגם $a+b=c$, והמספרים a ו-b שונים בצבע, אז גם המספרים b ו-c שונים בצבע?

בהצלחה!

24/6/2019 **מחנה קיץ** כ"א בסיוון תשע"ט

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. האם ניתן לצבוע את המספרים השלמים החיוביים במספר סופי של צבעים כך שלא כל המספרים יהיו באותו צבע, כך שאם $a<b$ וגם $a+b=c$, והמספרים a ו-b שונים בצבע, אז גם המספרים b ו-c שונים בצבע?

2. הראו כי $\sqrt[2n+1]{\frac{x^{2n+1}+1}{2}} \geq \frac{x^{n+1}+1}{x^n+1}$ לכל $x>0$.

3. במישור צוירו $2n$ ישרים שונים בזוגות: n כחולים ו-n אדומים. לכל נקודה P במישור מתקיים: סכום המרחקים מ-P לכל הישרים הכחולים קטן או שווה לסכום המרחקים מ-P לכל הישרים האדומים. עבור אילו ערכי n יתכן שלא כל הישרים מקבילים?

בהצלחה!

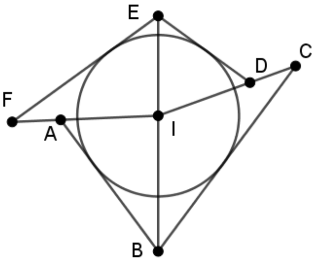
25/6/2019 **מחנה קיץ** כ"ב בסיוון תשע"ט

קבוצתית דן וירדן

1. חרגול קופץ על הנקודות השלמות של המישור. בקפיצה מספר k הוא עובר מרחק 1 בציר אחד ועובר מרחק k בציר האחר. עבור אילו ערכי n יתכן שלאחר n קפיצות החרגול חזר לנקודה המקורית?

2. מספרים ממשיים a,b,c,d מקיימים $ab+cd=4$ וגם $ac+bd=8$. מה הוא הערך המרבי עבור $abcd$?

3. בלוח 12×12 סומנו N משבצות. נתון שלכל משבצת לא פינתית יש לפחות 3 משבצות מסומנות סמוכות לפי צלע. מהו ה-N המינימלי האפשרי?



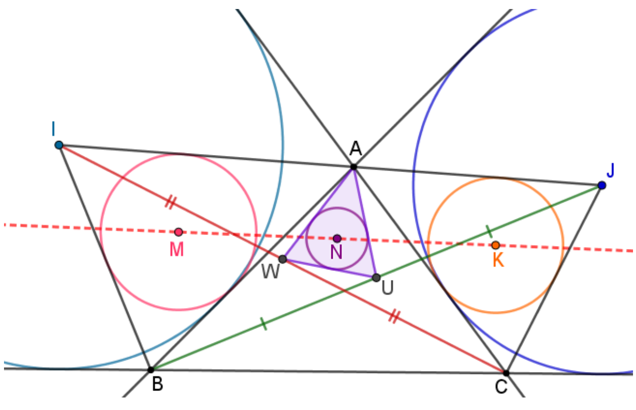
4. במשושה לא קמור ABCDEF המשכי הצלעות AF ו-CD עוברים דרך הנקודה I, והצלעות האחרות משיקות למעגל שמרכזו I. בנוסף נתון ש-I נמצאת על הקטע BE. הראו שאם $\mathrm{IC}=\mathrm{IF}$ אז $\mathrm{IA}=\mathrm{ID}$.

5. במישור סומנו בכחול חמשת הקודקודים של מחומש משוכלל. אמצעי הקטעים שקצותיהם כחולים סומנו בכתום. מעגל מגניב הוא מעגל שיש עליו לפחות 3 נקודות כתומות. כמה מעגלים מגניבים יש?

6. נתון מספר ראשוני $p=mn+1$, כאשר $m,n>1$ שלמים. נתון כי m^3+n^3 מתחלק ב-p. הראו כי m^2+m+1 ראשוני, או n^2+n+1 ראשוני.

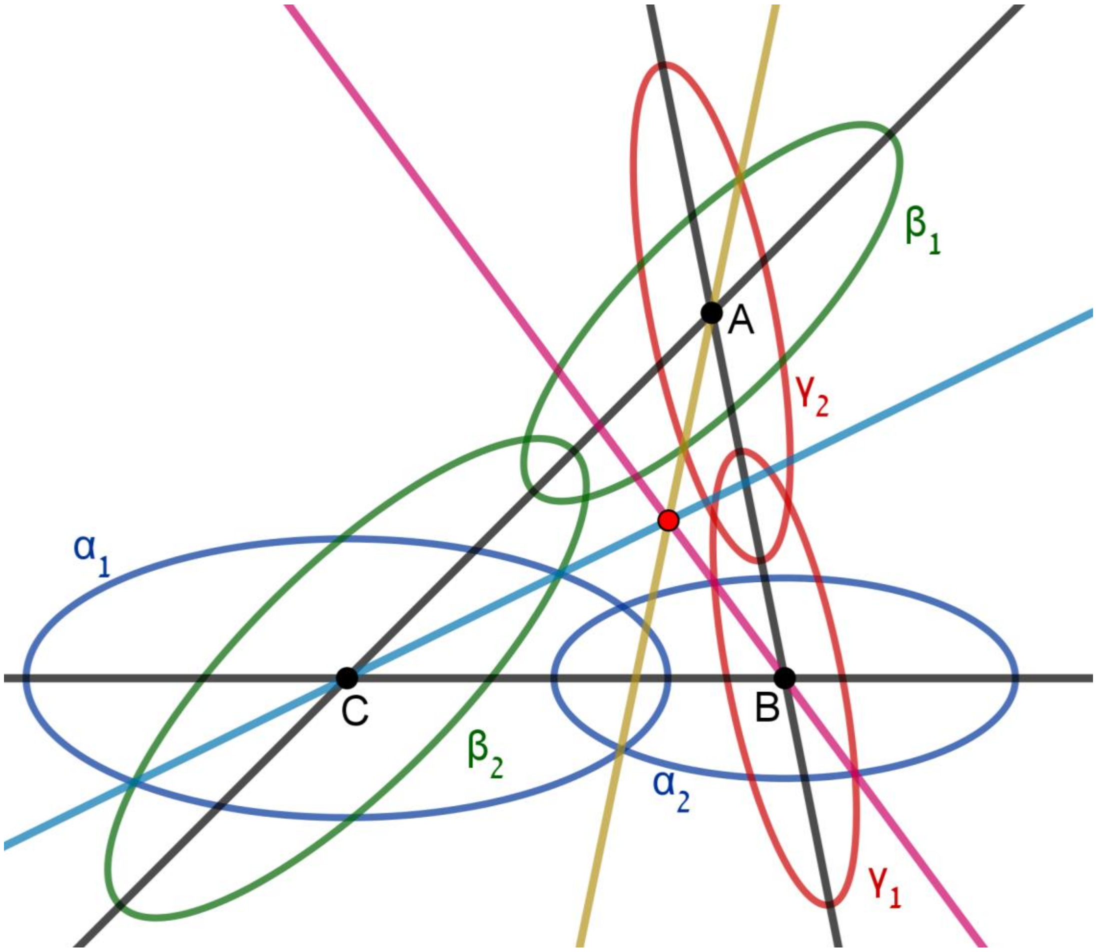
7. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך שלכל שני ממשיים x ו-y מתקיים

$$f\left(y^2+xy\right)+x\cdot f\left(x+y\right)=\left(f\left(f\left(x\right)+y\right)\right)^2$$



8. במשולש ABC מרכזי המעגלים החסומים מחוץ לצלעות AB ו-AC הם I ו-J בהתאמה. מרכזי המעגלים החסומים במשולשים ABI ו-ACJ הם M ו-K. אמצעי הקטעים CI ו-BJ הם U ו-W. מרכז המעגל החסום במשולש UAW הוא N. הראו כי הנקודות K, N ו-M נמצאות על ישר אחד.

9. לקארל יש ערימה של 2019 אבנים. הוא רוצה להגיע למצב שיש לו 2019 ערימות של אבן אחת. בכל צעד, מותר לו לפצל ערימה קיימת לשתי ערימות, במחיר שהוא הפרש גדלי הערימות. כמה כסף קארל יצטרך כדי להצליח במשימתו?



10. נתון משולש ABC, ו-6 אליפסות: $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2$. הקודקוד A הוא מרכזן של האליפסות β_1 ו-γ_2, הקודקוד B הוא מרכזן של האליפסות γ_1 ו-α_2, והקודקוד C הוא מרכזן של האליפסות α_1 ו-β_2. האליפסות α_1 ו-α_2 דומות וציר הסימטריה הארוך שלהן הוא לאורך הישר BC. זוגות אליפסות נוספות שהן באותו הצבע מקיימות תנאי דומה עבור צלעות מתאימות של המשולש ABC. בנוסף, לכל שתי אליפסות עם מרכז משותף הציר הארוך שווה.

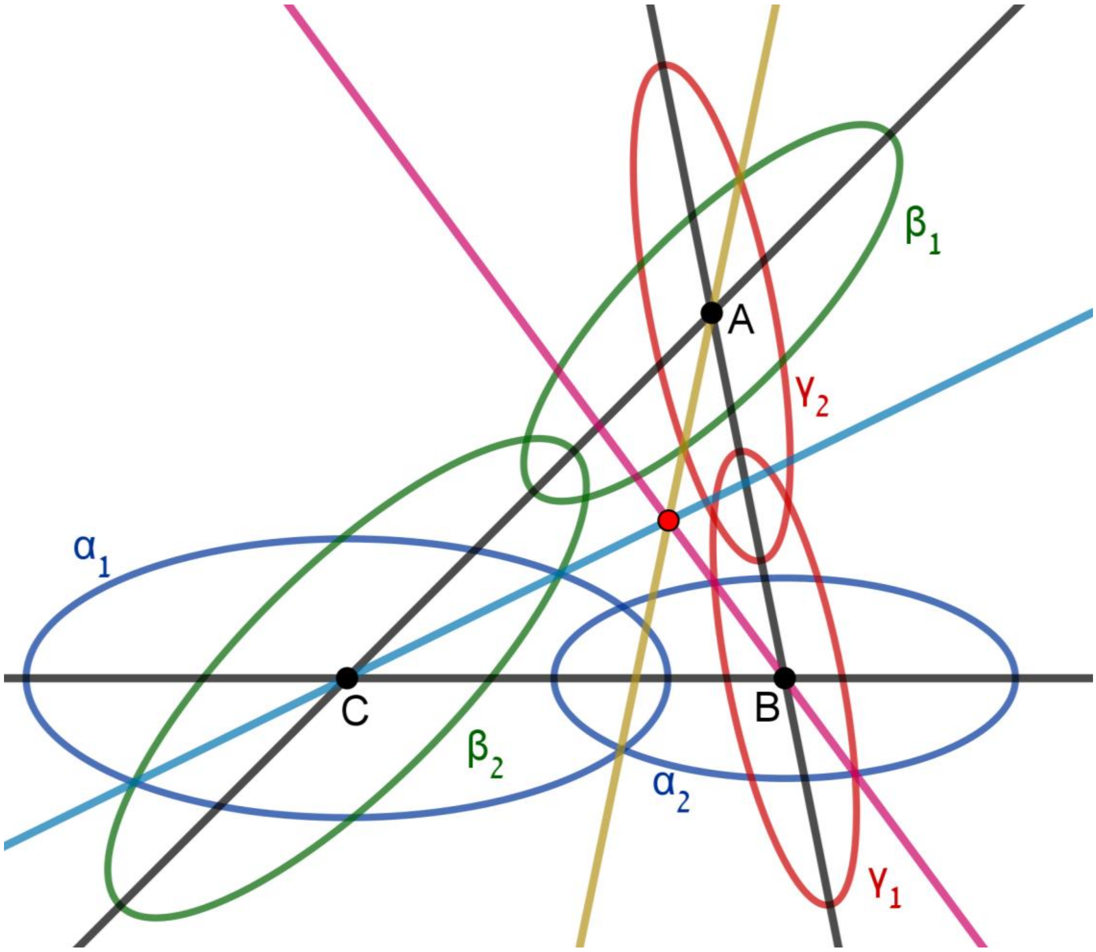
בכל שתי אליפסות בעלות מרכז משותף חיברו שתי נקודות חיתוך בישר, כמו בציור. הוכיחו ששלושת הישרים שהתקבלו נחתכים בנקודה.

בהצלחה!

תחרות קבוצתית לרותם

1. לקארל יש ערימה של 2019 אבנים. הוא רוצה להגיע למצב שיש לו 2019 ערימות של אבן אחת. בכל צעד, מותר לו לפצל ערימה קיימת לשתי ערימות, במחיר שהוא הפרש גדלי הערימות. כמה כסף קארל יצטרך כדי להצליח במשימתו?

2. מבין משבצות של לוח תלת-ממדי $10\times10\times10$ סומנו N משבצות, כך שלכל משבצת שלא נמצאת על המעטפת יש לפחות 5 משבצות מסומנות סמוכות לפי פאה. מהו ה- N המינימלי האפשרי?



3. נתון משולש ABC, ו-6 אליפסות: $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2$. הקודקוד A הוא מרכזן של האליפסות β_1 ו- γ_2, הקודקוד B הוא מרכזן של האליפסות γ_1 ו- α_2, והקודקוד C הוא מרכזן של האליפסות α_1 ו- β_2. האליפסות α_1 ו- α_2 דומות וציר הסימטריה הארוך שלהן הוא לאורך הישר BC. זוגות אליפסות נוספות שהן באותו הצבע מקיימות תנאי דומה עבור צלעות מתאימות של המשולש ABC. בנוסף, לכל שתי אליפסות עם מרכז משותף הציר הארוך שווה. בכל שתי אליפסות בעלות מרכז משותף חיברו שתי נקודות חיתוך בישר, כמו בציור. הוכיחו ששלושת הישרים שהתקבלו נחתכים בנקודה.

4. מספרים חיוביים c,b,a ו- d מקיימים $a+b+c+d=4$. הראו כי

$$\frac{\left(a+3\sqrt{b}\right)^2}{\sqrt{a^2+3b^2}}+\frac{\left(b+3\sqrt{c}\right)^2}{\sqrt{b^2+3c^2}}+\frac{\left(c+3\sqrt{d}\right)^2}{\sqrt{c^2+3d^2}}+\frac{\left(d+3\sqrt{a}\right)^2}{\sqrt{d^2+3a^2}}\le 32$$

5. לכל מספר שלם חיובי n נגדיר את החתימה שלו להיות (x,y) כאשר x היא הספרה השמאלית ביותר של n ו- y זו הספרה השמאלית ביותר של n^2. האם קיים מספר k כך שלמספרים

$$k,k^2,\left(k^2\right)^2,\left(\left(k^2\right)^2\right)^2,\ldots$$

(הסדרה באורך 150) יש את כל החתימות האפשריות?

6. נתון משולש ABC החסום במעגל Ω. המעגל החסום מחוץ לצלע BC הוא α. המעגלים α ו-Ω נחתכים בנקודות U ו-V כך שהנקודות A, B, U, V, C נמצאות על המעגל החוסם בסדר זה. עקבי חוצי הזוויות מ-B ו- C במשולש יקראו E ו-F. הישר EF חותך את Ω בנקודות P ו-Q הנמצאות על הקשתות AB ו-AC בהתאמה. תהא I מרכז המעגל החסום במשולש ABC. הישרים PI ו-QI חותכים שנית את Ω בנקודות X ו-Y בהתאמה. הראו כי הישרים UX ו- VY נחתכים בנקודת ההשקה של α ל-BC.

7. במישור סומנו 7 נקודות כחולות שהן הקודקודים של מצולע משוכלל (בעל 7 צלעות). אמצעי הקטעים שקצותיהם כחולים סומנו בכתום. מעגל מגניב הוא מעגל שיש עליו לפחות 3 נקודות כתומות. כמה מעגלים מגניבים יש?

8. מצאו את כל הפונקציות הרציפות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אשר מקיימות $f(0)=0$ וגם

$$f\left(y\cdot f(x)\right)+f\left(x\cdot f(y)\right)=\frac{f(2x)\,f(2y)}{2}$$

בהצלחה!

26/6/2019 **מחנה קיץ** כ"ג בסיוון תשע"ט

קבוצת דן

אין להשתמש במחשבון

1. מצאו את המחלק המשותף הגדול ביותר של כל המספרים מהצורה

$$n(n+1)(2n+1)(3n+1)(4n+1)$$

כאשר n יכול להיות מספר טבעי כלשהו.

2. נתון ריבוע ABCD. נתונות בנוסף נקודה U על BC, נקודה V על AD, ונקודה W על CD כך ש- $\measuredangle UVW = 45^\circ = \measuredangle AUV$. הראו כי UV חותך את AW בנקודה שנמצאת על אחד האלכסונים של הריבוע ABCD.

3. למשתה המלך הוזמנו 100 אנשים. המלך חילק לכל אחד מהם כובע בצבע כלשהו (לא ידוע מראש אילו צבעים יכולים להיות לכובעים). כל אדם רואה את הכובעים של כל האנשים האחרים. כשהמלך מכה בפעמון, כל אדם צריך לנחש לכמה אנשים במשתה יש כובע בצבע זהה לשלו (כולל עצמו). אם לפחות אדם אחד צודק, המלך שמח והמשתה נערך כהלכתו. אחרת, כולם מורעלים במשתה. האנשים יכולים לדבר אחד עם השני לפני חלוקת הכובעים. כיצד יוכלו להציל את עצמם?

4. שורשי הפולינום $x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ הם x_1,x_2,x_3,x_4,x_5. הראו כי

$$(1+c)^3+(a+d)^3+(b+e)^3-3(1+c)(a+d)(b+e)=\prod_{k=1}^{5}\left(1-x_k^3\right)$$

בהצלחה!

26/6/2019 **מחנה קיץ** כ"ג בסיוון תשע"ט

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. נתון ריבוע ABCD. נתונות בנוסף נקודה U על BC, נקודה V על AD, ונקודה W על CD כך ש- $\sphericalangle UVW = \sphericalangle AUV = 45^\circ$. הראו כי UV חותך את AW בנקודה שנמצאת על אחד האלכסונים של הריבוע ABCD.

2. האם קיימת קבוצה של מספרים שלמים חיוביים $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_{5779}\}$, כך שהסכום של כל תת-קבוצה לא ריקה של קבוצה זאת הוא לא ריבוע שלם?

3. למשתה המלך הוזמנו 100 אנשים. המלך חילק לכל אחד מהם כובע בצבע כלשהו (לא ידוע מראש אילו צבעים יכולים להיות לכובעים). כל אדם רואה את הכובעים של כל האנשים האחרים. כשהמלך מכה בפעמון, כל אדם צריך לנחש לכמה אנשים במשתה יש כובע בצבע זהה לשלו (כולל עצמו). אם לפחות אדם אחד צודק, המלך שמח והמשתה נערך כהלכתו. אחרת, כולם מורעלים במשתה. האנשים יכולים לדבר אחד עם השני לפני חלוקת הכובעים. כיצד יוכלו להציל את עצמם?

4. שורשי הפולינום $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ הם x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. הראו כי

$$(1+c)^3 + (a+d)^3 + (b+e)^3 - 3(1+c)(a+d)(b+e) = \prod_{k=1}^{5}\left(1 - x_k^3\right)$$

בהצלחה!

26/6/2019 **מחנה קיץ** כ"ג בסיוון תשע"ט

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. תהא S קבוצה של מספרים שלמים חיוביים. הוכיחו כי לפחות אחת משתי התכונות הבאות מתקיימת:

א) קיימות תתי קבוצות סופיות, זרות $F,G\subseteq S$ עם $\sum_{x\in G}\frac{1}{x}=\sum_{x\in F}\frac{1}{x}$.

ב) קיים מספר רציונלי $0<r<1$ כך שלכל $F\subseteq S$ סופית, $\sum_{x\in F}\frac{1}{x}\neq r$.

2. יהא ABC משולש ותהא T נקודה בתוכו. יהיו A_1,B_1,C_1 השיקופים של T ביחס לישרים BC,CA,AB בהתאמה. יהא Ω המעגל החוסם של $A_1B_1C_1$. הישרים A_1T,B_1T,C_1T פוגשים את Ω שנית בנקודות A_2,B_2,C_2 בהתאמה. הוכיחו כי הישרים AA_2,BB_2,CC_2 והמעגל Ω נפגשים בנקודה אחת.

3. יהא $n\geq 2019$ שלם. יהיו $a_1,a_2,...,a_n,b_1,b_2,...,b_n$ שלמים חיוביים שונים בזוגות שאינם גדולים מ-$5n$. נתון שהסדרה $\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},...,\frac{a_n}{b_n}$ הינה סדרה חשבונית. הוכיחו שהיא למעשה סדרה קבועה.

בהצלחה!

8. מצאו את כל הפונקציות הרציפות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אשר מקיימות

$$f\left(y\cdot f\left(x\right)\right)+f\left(x\cdot f\left(y\right)\right)=\frac{f\left(2x\right)f\left(2y\right)}{2}$$

פתרון. $f\left(y\cdot f\left(x\right)\right)+f\left(x\cdot f\left(y\right)\right)=\frac{f\left(2x\right)f\left(2y\right)}{2}$

$2f\left(0\right)=\frac{f\left(0\right)^2}{2}$ לכן $f\left(0\right)=0,4$

אם $f\left(0\right)=4$ אז נציב $x=0$ ונקבל $f\left(4y\right)+4=2f\left(2y\right)$

$f\left(2z\right)+4=2f\left(z\right)$

אז $f\equiv 4$ או f לא חסום. אם לא אז הוא מקבל ערכים לא חסומים מלמעלה (כמו במקרה השני). אם $f\left(a\right)=8$ אז $f\left(2a\right)=12$ ואז $x=a$ נותן $f\left(a\cdot f\left(y\right)\right)+f\left(8y\right)=6f\left(2y\right)$.

אז $f\left(2y\right)=2f\left(y\right)-4$ לכן $f\left(4y\right)=4f\left(y\right)-12$

אז $f\left(8y\right)=8f\left(y\right)-28$ ואז $f\left(a\cdot f\left(y\right)\right)=4f\left(y\right)+4$

אבל $f\left(y\right)$ יכול להיות כל $z\geq 4$ ולכן $f\left(ay\right)=4y+4$.

אז

אם $f\left(0\right)=0$.

אם בסביבת 0 הפונקציה מתאפסת, אבל היא לא 0 זהותי, יש ערך של z עבורו $f\left(z\right)=0$ אבל $f\left(2z\right)\neq 0$ ונציב $x=y=z$ ונקבל סתירה.

לכן ניתן להניח $x_n\to 0$ אבל $f\left(x_n\right)\neq 0$ ואז $y_n\cdot f\left(x_n\right)$ כרצוני. אם f חסומה אז $f\left(x\cdot f\left(y\right)\right)\to 0$, וגם $f\left(2x\right)\cdot f\left(2y\right)\to 0$ אבל $f\left(y\cdot f\left(x\right)\right)$ לא שואף ל-0, וזו סתירה.

אם f חסומה מלמעלה אז נציב $x=y$ כך ש- $f(2x)<<0$, ונקבל סתירה. אז לא חסומה מלמעלה.

מקבלת כל ערך חיובי (מערך ביניים).

נציב $f(x)=2$ אז $f(2y)+f(x\cdot f(y))=\frac{f(2x)f(2y)}{2}$ לכן

$f(x\cdot f(y))=C\cdot f(2y)$ לכל y. אבל $C\neq 0$ כי ניתן להציב $f(y)=1$.

לכן $f(2y)=\Phi(f(y))$.

נוכיח חח"ע . אם $f(x)=f(z)$ אז $f(x\cdot f(y))=f(z\cdot f(y))$, לכן

$$4f(x\cdot f(x))=f(2x)^2$$

אם $f(A)=1$ אז $4=f(2A)^2$.

בכל צד יש 0 או חח"ע, לכן בכל צד יש מונוטוניות.

$4f(4A)=f(4A)^2$.

נציב $x=A$ ואז $f(y)+f(A\cdot f(y))=f(2y)$ (*)

נציב $x=2A$ ואז $f(2y)+f(2A\cdot f(y))=2f(2y)$

$$f(2A\cdot f(y))=f(2y)=f(y)+f(A\cdot f(y))$$

$$f(2A\cdot f(y))-f(A\cdot f(y))=f(y)$$

$f(2A\cdot y)-f(A\cdot y)=y$ לכל y חיובי

$f(2y)-f(y)=\frac{y}{A}$ לכל y חיובי

אבל לפי (*) נקבל $f(2y)-f(y)=f(Af(y))$

לכן $f(Af(y))=\frac{y}{A}$

אם $g(y)=A\cdot f(y)$ אז $g(g(y))=y$ באותו חצי ישר נקבל $g(y)=y$.