תורת המספרים והמשפט הקטן של פרמה

משפט: (המשפט הקטן של פרמה)
לכל p ראשוני ולכל a שזר ל p מתקיים $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$.
ניסוח שקול: לכל p ראשוני ולכל a מתקיים $a^{p} \equiv a \ (mod\ p)$.
משפט: (משפט אוילר)
$a^{\varphi(n)} = 1 \ (mod\ n)$ כאשר $\varphi(n)$ פונקציית אויילר של n: מספר הטבעיים הקטנים מ n וזרים לו.

1) א) נתון כי $a^2 + b^2$ מתחלק ב 3. הוכיחו כי גם a ו b מתחלקים ב 3.
ב) נתון כי $a^3 + b^3 + c^3$ מתחלק ב 7, הוכיחו כי גם abc מתחלק ב 7.
ג) הוכיחו כי 111111111111 (12 פעמים 1) מתחלק ב 13.
ד) הוכיחו כי $n^2 + n + 1$ לא מתחלק ב 101 לאף n.
ה) נגדיר סדרה $a_n = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$. האם יש 4 איברים רצופים בסדרה שמתחלקים ב2020?

2) נסחו והוכיחו סימני חלוקה ב $2, 3, 4, 6, 9, 11, 27, 37$.

3) רושמים את המספרים מ 112 עד 444 ברצף בסדר כלשהו.
האם יתכן שהמספר הארוך שנוצר הוא חזקה של 3?

4) האם לכל ראשוני p וטבעי c קיים x כך ש $x^x = c \ (mod\ p)$.

5) א) יהי $n \geq 3$ צ"ל $n^{n^n} - n^n$ מתחלק ב 16.

ב) יהי $n \geq 3$, צ"ל כי $n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$ מתחלק ב 2019.

6) הוכיחו כי לכל ראשוני p קיים n טבעי עבורו $6^n + 3^n + 2^n - 1$ מתחלק ב p.

7) מצאו את כל הפתרונות השלמים של המשוואה $5x^2 - 2y^5 = 1009$.

8) מצאו את כל הפתרונות השלמים של המשוואה $a^3 + 3ab^2 + 7b^3 = 2011$.

בתאבון!