

קומבי

1. האם לכל שני מצולעים שווי שטח ניתן לחתוך בקווים ישרים את המצולע הראשון למצולעים קטנים יותר, ולהזיז (אסור לסובב או לשקף) את המצולעים הקטנים כך שירכיבו את המצולע השני?
2. איילה וברוזה משחקים משחק על גרף עם 2019 קודקודים. תחילה, איילה מניחה כלי משחק על אחד מקודקודי הגרף לבחירתה. לאחר מכן, ברוזה מתחיל, וכל אחד בתורו מזיז את כלי המשחק לקודקוד בו הוא לא ביקר. השחקן הראשון שאין לו מהלך מפסיד. האם איילה בהכרח תנצח?
3. בלוח משבצות $m \times n$ המלכה אליזבת רוצה לסמן כמה שיותר רביעיות זרות של משבצות, כך שכל רביעיה יוצרת מלבן שמקביל לצלעות הלוח. כמה רביעיות כאלה היא יכולה לסמן:
 - א. כאשר $m = n = 5$?
 - ב. כתלות ב- m, n ?
4. נתון מצולע עם 45 קודקודים הצבועים בכתום, ירוק, וסגול. הוכיחו כי קיימים שלושה משולשים חופפים, כך שקודקודי המשולש הראשון צבועים כולם בכתום, קודקודי השני צבועים בירוק, וקודקודי השלישי בסגול.
5. נתונים 3^{2n} מטבעות, אחד המטבעות מזויף וקל יותר. נתונים שלושה זוגות של מאזני כף, מתוכם שניים תקינים ואחד שאינו תקין, שבכל שקילה נותן תשובה אקראית. הוכיחו כי ניתן למצוא את המטבע המזויף ב- $3n + 1$ שקילות.
6. מסביב לשולחן העגול יושבים n אבירים, מתוכם חלק טהורי לב וחלק מושחתים. ארתור לא יודע מי טהורי הלב או כמה מהם יש, אך הוא יודע שיש רוב של אבירים טהורי לב. ארתור יכול לשאול את אחד האבירים לגבי נטיית לבו של אביר אחר. אביר טהור לב יאמר תמיד אמת, ואביר מושחת יכול לשקר (אך יכול גם שלא). האם ארתור יצליח לגלות בוודאות מי האבירים טהורי הלב תוך:
 - א. $4n$ שאלות?
 - ב. $2n - 2$ שאלות?
7. במעגל מסודרות מספר קופסאות. בכל קופסה יש מספר כדורים (יכולים להיות גם 0 או 1), שכולם זהים. בכל מהלך מוציאים את כל הכדורים מאחת הקופסאות ומכניסים אותן לקופסאות, כדור אחד לקופסה, כאשר עוברים על הקופסאות לפי כיוון השעון, ומתחילים בקופסה הבאה אחרי הקופסה ממנה נלקחו הכדורים.
 - א. נניח שבכל מהלך (חוץ מהראשון) לוקחים את הכדורים מהקופסה שאליה הכניסו את הכדור האחרון במהלך הקודם. הוכיחו כי ברגע מסוים הסידור ההתחלתי של הכדורים יחזור על עצמו.
 - ב. נניח שעכשיו מותר לקחת כדורים מכל קופסה שרוצים. האם ניתן להעביר כל מצב לכל מצב אחר עם אותו מספר כדורים?
8. n כדורים, הצבועים בשני צבעים, מסודרים במעגל. נתון כי לכל נקודה על המעגל הממוקמת בין שני כדורים סמוכים, קיים $0 < m < n$ כך שהרצף של m הכדורים שמשמאלה זהה לרצף של m הכדורים שממימנה. הוכיחו שקיים $n < k$ עבורו לסידור הכדורים יש מחזור באורך k .