<u>מספרי ברנולי:</u>

מספרי ברנולי: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k}{k!}t^k = \frac{t}{e^t-1}$.

מספרי ברנולי ראשונים:

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_8 = -\frac{1}{30}, B_{10} = \frac{5}{66}, B_{12} = -\frac{691}{2730}$$

מספרי ברנולי אי זוגיים: $B_{2k+1} = 0$ עבור $k > 0$.

פולינומי ברנולי: $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k(x)}{k!}t^k = \frac{te^{xt}}{e^t-1}$.

מספרי ברנולי מתוך פולינומי ברנולי: $B_k = B_k(0)$

פולינומי ברנולי לפי מספרי ברנולי: $B_k(x) = \sum_{\ell=0}^{k}\binom{\ell}{k}B_k x^{\ell-k}$**.**

תכונות של פולינומי ברנולי:

1. $B_n(x)' = nB_{n-1}(x)$.
2. $\int_0^1 B_n(x)dx = 0$ עבור $n > 0$.
3. $B_0(x) = 1$.
4. $\Delta B_k(x) = kx^{k-1}$ $(\Delta f(x) = f(x+1) - f(x))$.

רקורסיה על מספרי ברנולי: $\sum_{\ell=1}^{k}\frac{1}{\ell+1}\binom{k}{\ell}B_{k-\ell} = 0$ עבור $k > 1$**..**

סכומי חזקות:

הגדרה: $S_k(n) = 0^k + \cdots + (n-1)^k$

משפט: $S_k(n) = \frac{B_{k+1}(n) - B_{k+1}(0)}{k+1}$**.**

טור של קוטנגנס: ..$cot(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}B_{2n}x^{2n-1}$.

משפט *Clausen – von-Staudt*: $B_n + \sum_{p-1|n}\frac{1}{p}$ שלם, כאשר p מסמן ראשוני**.**

קונגרואנציית קומר: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{B_{m+k(p-1)}}{m+k(p-1)} \equiv 0 \; mod(p^n)$ אם $m \geq n$.

ערכים של זטא: $\zeta(2m) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} \ldots + \left(\frac{1}{n}\right)^{2m} + \cdots = (-1)^{m+1}\frac{1}{2}\frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!}B_{2m}$**.**

נוסחאת אוילר – מקלורין:

$$\sum_{n=a}^{b} f(n) \approx \int_a^b f(x)dx + \frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}\left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(b)\right).$$