פותרים בעזרת בורסוק-אולם

תרגיל ברובו של ארסני אקופיאן

1. במישור נתונות N נקודות אדומות ו-K נקודות כחולות (במצב כללי, כלומר אף 3 נקודות צבעוניות לא על ישר אחד). הראו שקיים ישר שמחלק את המישור לשני חצאי-מישור פתוחים שכל אחד מהם מכיל $\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$ נקודות אדומות ו-$\left\lfloor \frac{K}{2} \right\rfloor$ נקודות כחולות.

2. הראו שקילות של הניסוחים הבאים של משפט בורסוק-אולם:

א) לכל העתקה רציפה $f:\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ קיימת נקודה $x \in \mathbb{S}^n$ עבורה $f(x) = f(-x)$.

ב) לכל העתקה רציפה אי-זוגית $f:\mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^n$ קיימת נקודה $x \in \mathbb{S}^n$ עבורה $f(x) = 0$.

ג) (לוסטרניק ושנירלמן) לכל כיסוי של $\mathbb{S}^n$ על ידי קבוצות פתוחות (או סגורות) $U_0, U_1, \ldots, U_n$ קיימות שתי נקודות נגדיות שנמצאות באותה קבוצה.

3. הסיקו מבורסוק-אולם את משפט הכריך: במרחב $\mathbb{R}^d$ נתונים d גופים (או מידות רציפות). אז קיים מישור שמחלק כל גוף לחצאים.

4. הוכיחו את משפט בורסוק-אולם עבור קליפה כדורית דו-ממדית.

5. הראו כי על כדוה"א יש שתי נקודות מנוגדות עם אותה טמפרטורה ואותו לחץ אוויר.

6. במישור נמצאות 5 צורות. הראו כי קיימת שניונית שחוצה את כולם.

7. במישור סומנו 9 נקודות שונות: 3 אדומות, 3 ירוקות ו-3 כחולות. נתון שמבין הנקודות המסומנות אף 3 לא על ישר אחד ואף 4 לא על מעגל אחד. הראו שניתן לצייר 3 קשתות מעגליות שאין לאף שתיים מהן נקודות משותפות לא בפנים ולא בקצוות, ועל כל קשת נמצאות נקודות מסומנות מכל הצבעים.

8. (ר. קרסיוב) בתוך ריבוע סומנו $k-1$ נקודות כחולות ו-$k-1$ נקודות אדומות במצב כללי (כאשר $k \geq 2$). הראו שניתן לחלק את הריבוע לחלקים קמורים שבתוכם אין נקודות צבעוניות, ועל השפה של כל אחד מהם יש גם נקודה כחולה וגם נקודה אדומה.

9. ב-$\mathbb{R}^d$ נתונות קבוצות $A_1, A_2, \ldots, A_d$, בכל קבוצה n נקודות, כל הנקודות במצב כללי. הראו שאפשר לחלק את האיחוד שלהם ל-n קבוצות כך שבכל קבוצה יהיה איבר אחד מכל A_i והקמורים שלהם יהיו זרים.

10. (א. בוגדנוב, י. קוליקוב, ג. צ'לנוקוב) ב-100 ארגזים נמצאים תפוחים, תפוזים ובננות. הראו כי ניתן לבחור 51 ארגזים שבהם יהיו לא פחות ממחצית התפוחים, לא פחות ממחצית התפוזים ולא פחות ממחצית הבננות.

11. מחרוזת (פתוחה) עם d סוגים של אבני חן ניתן לחלק בין שני פיראטים כך שכל אחד יקבל כמות זהה של אבני חן מכל סוג, כשחותכים את השרשרת d פעמים לכל היותר.

12. (וודל וסטורמקוויסט) על המעגל $\mathbb{S}^1$ מוגדרות n מידות לא סינגולאריות. הראו כי לכל $\alpha\in[0,1]$ קיימות $n-1$ קשתות זרות כך שאינטגרל של כל מידה על איחוד הקשתות שווה ל- α.

13. הכללה של שאלה 10 לכל α: הראו שאם יש k סוגי פירות ב- N ארגזים, לכל α ניתן לבחור $2k+\lfloor \alpha N \rfloor$ ארגזים שבהם הכמות של כל פרי היא לפחות α.

14. (משפט דולניקוב) ב- $\mathbb{R}^d$ נתונות d משפחות של קבוצות קשירות וחסומות, כך שכל שתי קבוצות באותה משפחה נחתכות. הראו כי קיים על-מישור שחותך את כל הקבוצות.

15. (משפט לובאס-קנזר) מצאו d מינימלי כך שאת כל תתי-הקבוצות בגודל k של קבוצה בגודל n ניתן לחלק ל- d משפחות, כך שלכל שתי תתי-קבוצות מאותה משפחה יש איבר משותף.

בתיאבון!