סדרות

1. הסדרה a_n מוגדרת בצורה הבאה: $a_1 = 1, a_{2n} = a_n + 1$
$a_{2n+1} = \frac{1}{a_{2n}}$. הוכח כי כל רציונאלי חיובי מופיע בסדרה בדיוק פעם אחת.

2. נתונה פונקציה $f: (0,1) \to (0,1)$ המוגדרת בצורה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & x < \frac{1}{2} \\ x^2 & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

בנוסף נתונים שני מספרים ממשיים $0 < a < b < 1$. נגדיר שתי סדרות a_n, b_n באופן הבא: $a_0 = a, a_{n+1} = f(a_n)$, $b_0 = b, b_{n+1} = f(b_n)$.

הוכח שקיים n כך ש- $(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0$.

3. נתונה סדרה a_n המוגדרת כך: $a_1 = 1, 2a_{n+1} = 3a_n + \sqrt{5a_n^2 - 4}$

א. הוכח כי כל אברי הסדרה הם מספרים טבעיים.

ב. האם קיים n כך ש- $2011|a_n$?

4. נתונה סדרה a_n המוגדרת כך: $a_1 = 2010, a_2 = 2011$

$a_{n+2} = a_n + a_{n+1} + b\sqrt{a_n a_{n+1} + c}$ כאשר b, c קבועים.

האם קיימים קבועים b, c עבורם כל אברי הסדרה שלמים?

5. נתון k טבעי, ובנוסף נתונה סדרה a_n המוגדרת בצורה הבאה: $a_0 = \frac{1}{2}$ ו- $a_n = a_{n-1} + \frac{a_{n-1}^2}{k}$. הוכח כי $1 - \frac{1}{k} < a_k < 1$.

6. נתונה סדרת מספרים שלמים המוגדרת באופן הבא: $a_0 = 1, a_1 = 3$

$a_{n+2} = 1 + \left\lfloor \frac{a_{n+1}^2}{a_n} \right\rfloor$. הוכיחו כי $a_n \cdot a_{n+2} - a_{n+1}^2 = 2^n$ לכל n.

7. נתון מספר טבעי n וסדרת מספרים טבעיים סופית $a_1, .., a_n$ כך ש-

$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_n \leq a_1 + n$, נרחיב אותה לסדרה אינסופית בצורה הבאה:
$a_{n+i} = a_i$ לכל $i \geq 1$.
נתון ש- $a_{a_i} \leq n + i - 1$ לכל $1 \leq i \leq n$. הוכיחו כי $a_1 + ... + a_n \leq n^2$.

8. נתונות שתי סדרות לא קבועות של מספרים רציונאליים s_n ו- t_n, בנוסף נתון שלכל שני אינדקסים i, j המספר $(s_i - s_j)(t_i - t_j)$ שלם. הוכיחו כי קיים מספר רציונאלי g כך ש- $(s_i - s_j) \cdot g$ ו- $\frac{t_i - t_j}{g}$ מספרים שלמים, לכל i, j.