א

1. נסמן ב-$S(n)$ את סכום ספרותיו של n ברישום עשרוני. הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים $S(8n) \geq \frac{S(n)}{8}$.

2. תהי $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ פונקציה לא קבועה כך ש- $a-b \mid f(a)-f(b)$ לכל a,b. הוכיחו שקיימים אינסוף ראשוניים p כך שקיים c טבעי עבורו $p \mid f(c)$.

3. בהינתן מספר טבעי n, נגדיר את ה-b-נגזרות שלו בתור המספרים שאפשר לקבל על ידי מחיקה של ספרה אחת בדיוק מ-n כשרושמים אותו בבסיס b.
לדוגמה, ה-10-נגזרות של 1234 הן 123,124,134,234. נאמר שמספר הוא **מדהים** אם:
(i) ל-n יש בדיוק 2017 ספרות כשרושמים אותו בבסיס 2017.
(ii) סכום כל ה-2017-נגזרות שלו הוא n בעצמו.
כמה מספרים מדהימים יש?

4. נתון p ראשוני, ונתון שלם חיובי n המקיים $1 \leq n \leq p-1$. הוכיחו שהמספר $\varphi\left(\sum_{n=0}^{p-1} n^k\right)$ מתחלק ב-p (כאשר φ היא פונקצית אוילר).

5. נתון p ראשוני. הוכיחו של- $p^p - 1$ יש גורם ראשוני ששקול ל-1 מודולו p.

6. מצאו את כל השלמים החיוביים n עבורם קיים שלם חיובי m כך ש-$2^n - 1$ מחלק את $m^2 + 9$.

7. נסמן ב-$d(n)$ את כמות המחלקים החיוביים של n. מצאו את כל השלמים m מהצורה $m = \frac{d(n^2)}{d(n)}$ עבור n שלם חיובי כלשהו.

8. הוכיחו שקיימים אינסוף שלמים חיוביים m, כך שכמות המחלקים הראשוניים האי-זוגיים של $m^2 + 3m$ מתחלקת ב-3.

9. נסמן ב p_n את המחלק הראשוני הגדול ביותר של $n^4 + n^2 + 1$. הוכיחו שקיימים אינסוף שלמים חיוביים n כך ש-$p_n = p_{n+1}$.

10. נתון שלם חיובי n כך ש-$m = 2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ הוא מספר שלם. הוכיחו ש-m הוא ריבוע שלם.

המשך מאחורי הדף

11. נאמר שמספר רציונלי הוא עוצמתי, אם ניתן להציגו בתור $\frac{p^k}{q}$, כאשר p,q שלמים זרים ו-$k>1$ שלם. נתונים מספרים רציונליים a,b,c כך ש-$a\cdot b\cdot c=1$. ידוע שקיימים שלמים חיוביים x,y,z כך ש-$a^x+b^y+c^z$ מספר שלם. הוכיחו ש-a,b,c עוצמתיים.

12. קבוצה של שלמים חיוביים נקראת קבוצה חשבונית, אם היא מכילה לפחות 3 איברים, והם מהווים סדרה חשבונית. קבוצה הנדסית מוגדרת באופן דומה. מצאו את כל השלמים החיוביים n, כך שניתן להציג את קבוצת המחלקים החיוביים של n כאיחוד זר של קבוצה חשבונית וסדרה הנדסית.

13. מצאו את כל השלמים החיוביים n בעלי התכונה הבאה: אם a,b הם שלמים חיוביים זרים המחלקים את n, אז גם $a+b-1$ מחלק את n.

14. מצאו את כל הזוגות (n,p) של שלמים חיוביים כך ש-p ראשוני ו-$\frac{n^p+1}{p^n+1}$ שלם.

15. נתון p ראשוני. מצאו את השלמים החיוביים x,y עבורם המספר $\sqrt{2p}-\sqrt{x}-\sqrt{y}$ אי-שלילי וקטן ככל האפשר.

בתיאבון!