כ"ז בשבט תשע"ח **מחנה חורף** 12/2/2018

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. במשולש ABC, מפגש הגבהים מסומן ב-H. מעגל שמרכזו H שעובר בנקודה A, חותך שנית את הצלעות AB ו-AC בנקודות E ו-D בהתאמה. הוכיחו כי המרובע BCDE חסום במעגל.

2. נניח כי a,b,c מספרים טבעיים. מה יכולה להיות ספרת האחדות של המספר $a^{2^{100}}+b^{2^{100}}+c^{2^{100}}$ ברישום העשרוני?

3. חרגול קופץ על נקודות שלמות של הישר הממשי. במהלך מספר n הוא יכול לעשות קפיצה באורך $\sqrt[3]{n}$ לכל היותר. האם הוא יכול לעבור בכל נקודה שלמה פעם אחת בדיוק?

4. מספרים חיוביים $a,b,c,d>0$ מקיימים $\frac{a}{c}=\frac{2c+d}{2a-b}$ וגם $\frac{b}{d}=\frac{2d+c}{2b-a}$. מצאו את ערכו של היחס $\frac{ab+cd}{ad+bc}$.

5. האם ניתן לחלק מחומש קמור כלשהו למחומשים קמורים?

בהצלחה!

12/2/2018 **מחנה חורף** כ"ז בשבט תשע"ח

קבוצת רותם

1. מספרים שלמים חיוביים $a_1,a_2,a_3,...,a_n,k,M$ מקיימים $a_1a_2a_3\cdot...\cdot a_n=M$.
בנוסף $k=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+...+\frac{1}{a_n}$, וגם $M>1$. הראו כי לפולינום

$$P(x)=M\left(x+1\right)^k-\left(x+a_1\right)\left(x+a_2\right)\cdot...\cdot\left(x+a_n\right)$$

אין אף שורש חיובי.

2. נסמן ב-O את מרכז המעגל החוסם של משולש ABC שהינו חד זוויות ואינו שווה שוקיים. הישר OA חותך את הגבהים מ-B ומ-C בנקודות P,Q. הגבהים נפגשים ב-H. הוכיחו שמרכז המעגל החוסם של PQH נמצא על תיכון של ABC.

3. קובייה $n\times n\times n$ מורכבת מ-n^3 קוביות יחידה. לכל קוביית יחידה יש צבע שהוא אחד מבין C צבעים. לכל שכבה $n\times n\times 1$ (בכל אחד מבין 3 הכיוונים), רושמים את כל הצבעים של כל הקוביות שמופיעות בשכבה. כך מקבלים $3n$ קבוצות, שמפוצלות ל-3 מחלקות בגודל n לפי כיוון השכבות. מסתבר שלכל מחלקה, כל קבוצה שמופיעה בה בהכרח מופיעה גם בכל מחלקה אחרת. מצאו את ה-C הגדול ביותר שיתכן עבור n נתון.

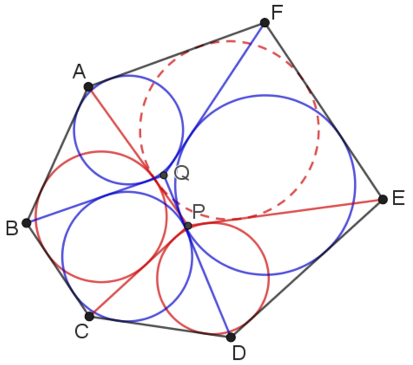
בהצלחה!

כ"ח בשבט תשע"ח **מחנה חורף** 13/2/2018

תחרות קבוצתית

אין להשתמש במחשבון

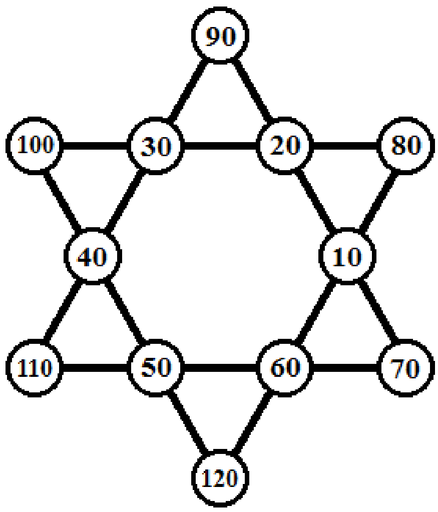
1. נתונים 100 פתקים, שעל כל אחד מהם רשומה ספרה בין 0 ל-9, כך שכל ספרה מופיעה לפחות על שני פתקים שונים.
הראו כי ניתן להרכיב מהפתקים מספר בן 100 ספרות שמתחלק ב-11.



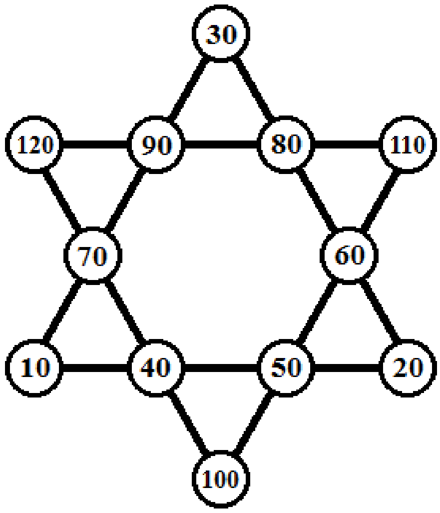
2. בתוך משושה קמור ABCDEF בוחרים נקודות P ו-Q, כך שבמשולשים PABC, PCDE, QFAB, QBCD, QDEF חסומים מעגלים. הראו שגם במרובע PAFE חסום מעגל.

3. במישור מציירים משושה משוכלל וממשיכים את צלעותיו. מקבלים 6 ישרים שנחתכים ב-12 נקודות. בכל נקודת מפגש יוצרים ערימה של מטבעות. לאחר מכן בועז מתחיל לשחק: בכל מהלך הוא יכול לבחור ישר מצויר ולקחת מטבע מכל אחת מ-4 הערימות שנמצאות עליו, או להוסיף מטבע לכל אחת מ-4 הערימות על ישר זה. אסור לו לקחת מטבעות מערימה ריקה. המטרה של בועז היא להוציא את הכמות המרבית של מטבעות מהערימות. כמה הוא יוכל להרוויח, אם המצב ההתחלתי הוא:

א. כמו בתמונה הימנית.



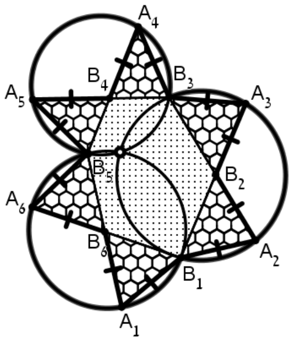
ב. כמו בתמונה השמאלית.



ג. בהתאם לבחירתו של בועז, אבל הכמויות הן 10, 20, 30, . . . , 120.

4. במישור נתונים 12 וקטורי יחידה היוצרים מצולע משוכלל. כמה וקטורים ניתן לייצג כסכום של חלק מהווקטורים הנתונים?

5. מספרים חיוביים $x_1, x_2, ..., x_{108}$ מקיימים $x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_{108} = 1$. הראו כי קיים $1 \le k \le 108$ כך שמתקיים $\frac{\sqrt[k]{x_k} + ... + \sqrt[108]{x_{108}}}{109-k} \ge 1$.



6. נתון מצולע שווה-צלעות $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4B_4A_5B_5A_6B_6$ (לא קמור) בו הזוויות A_i חדות, והזוויות B_i גדולות מ- 180°. הקטעים B_1A_3 ו- A_2B_3 נפגשים בנקודה B_2, וקצותיהם נמצאים על מעגל α. הקטעים B_3A_5 ו- A_4B_5 נפגשים בנקודה B_4, וקצותיהם נמצאים על מעגל β. הקטעים B_5A_1 ו- A_6B_1 נפגשים בנקודה B_6, וקצותיהם נמצאים על מעגל γ. מעגלים α, β, γ נפגשים בנקודה אחת בתוך המשושה הקמור $B_1B_2...B_6$.

מה יותר גדול: שטח המשושה $B_1B_2...B_6$ או סכום שטחי ששת המשולשים $B_{i-1}A_iB_i$ (בהנחה ש- $B_0 = B_6$)?

7. השלשה (1,2,1) רשומה על הלוח 2017 פעמים. גיא בוחר בכל פעם זוג שלשות שרשומות על הלוח, ומחליף אותן בשלשה חדשה לפי הכלל הבא:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (ax+bz+cy)^2 + 2(by+az+cx)\cdot(cz+ay+bx) \\ (by+az+cx)^2 + 2(ax+bz+cy)\cdot(cz+ay+bx) \\ (cz+ay+bx)^2 + 2(ax+bz+cy)\cdot(by+az+cx) \end{pmatrix}$$

לבסוף נשארה שלשה יחידה (A, B, C) על הלוח. מהו הערך המקסימלי האפשרי של A?

8. פתרו את המשוואה:

$$\sqrt{2x^2+2y^2+5} + \sqrt{x^2+y^2+3x+4} + \sqrt{x^2+y^2+y} = \sqrt{7\left(2x^2+2y^2+x+y+3\right)}$$

9. ארבעון מרחבי מחולק ל-5 פאונים קמורים.

א. האם יתכן שלכל אחד מהפאונים הקמורים האלה יש בדיוק 9 פאות?

ב. האם יתכן שלכל אחד מהפאונים הקמורים האלה יש בדיוק 7 פאות?

ג. האם יתכן שלכל אחד מהפאונים הקמורים האלה יש בדיוק 8 פאות?

בהצלחה!

14/2/2018 **מחנה חורף** כ"ט בשבט תשע"ח

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. מספרים $0<a<b<c$ מקיימים מערכת משוואות

$$\begin{cases} \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=a+b+c \\ abc=1 \end{cases}$$

האם ניתן לדעת את הערך של b?

2. "קטע דומינו" הוא קטע במישור, החצוי לשניים, וכל חצי צבוע באחד מ-7 צבעי הקשת (ייתכן ששני החצאים צבועים באותו הצבע). על מעגל מסומנות n נקודות. מציירים 7n קטעי דומינו, באשר כל קטע מחבר בין שתיים מ-n הנקודות המסומנות, ואף שני קטעים לא מתלכדים. "מעגל דומינו" הוא מסלול מעגלי של הנקודות המסומנות, המשתמש רק בקטעים המצויירים, כך שלכל שני קטעים עוקבים במסלול, צבעי החצאים שלהם אשר מכילים את הקדקוד המשותף – זהים. הוכיחו כי בהכרח קיים מעגל דומינו.

3. יהא ω מעגל, ונקודות A, B עליו. תהא M אמצע הקשת AB, ו-D אמצע הקטע AB. האנך האמצעי לקטע DM נחתך עם ω בנקודות X ו-Y על הקשתות AM ו-BM בהתאמה. תהא N על ω הנקודה הנגדית ל-X, ותהא C על ω כך ש-BC מאונך ל-NX. תהא Z על ω כך ש-YZ מקביל ל-BM. הוכיחו כי הישרים MN, BX ו-CZ נפגשים בנקודה אחת.

4. מצאו את כל הרביעיות $\left(a,b,c,n\right)$ של שלמים חיוביים עבורן מתקיים $a^{d(a)}+b^{d(b)}+c^{d(c)}+1=10^n$, באשר $d\left(k\right)$ הוא כמות המחלקים החיוביים של k.

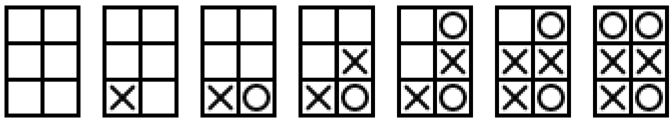
בהצלחה!

15/2/2018 **מחנה חורף** כ"ט בשבט תשע"ח

קבוצת רותם

1. מצאו את כל הרביעיות $\left(a,b,c,n\right)$ של שלמים חיוביים עבורן מתקיים
$a^{d(a)}+b^{d(b)}+c^{d(c)}+1=10^n$, כאשר $d\left(k\right)$ הוא כמות המחלקים החיוביים של k.

2. עבור לוח משבצות ריק, מוגדר התהליך הבא: בוחרים עמודה כלשהי שאינה מלאה, ומניחים במשבצת הפנויה הנמוכה ביותר בעמודה זו X. לאחר מכן, בוחרים שוב עמודה שאינה מלאה, ומניחים במשבצת הפנויה הנמוכה ביותר בעמודה זו O. ממשיכים כך, כאשר מניחים X ו-O לסירוגין, עד שהלוח מתמלא. דוגמה לתהליך אפשרי בלוח 2×3:



לוח מלא ב-X וב-O נקרא הוגן אם אפשר להגיע אליו מלוח ריק באמצעות תהליך כזה.
כמה לוחות הוגנים בגודל $k\times 2n$ (k שורות ו-$2n$ עמודות) קיימים עבור

א) k=2 ?

ב) k=3 ?

3. טרפז ABCD חסום במעגל ω, AB מקביל ל-CD. המשיק ל-ω ב-A חותך את הישר BD בנקודה E. המעגל EAC חותך את BC שנית בנקודה F. נתון כי EF משיק ל-ω. המעגל EAC פוגש את CD שנית בנקודה K. בוחרים נקודה M על חוצה הזווית של AEF כך שהזווית EKM ישרה. הוכיחו כי המרובע AMDE חסום במעגל.

בהצלחה!

15/2/2018 **מחנה חורף** ל' בשבט תשע"ח

קבוצת ירדן – תחרות בעל-פה

אין להשתמש במחשבון

1. ריבוע ABCD חסום במעגל Ω שרדיוסו 1. מציירים מעגל נוסף α שמרכזו ב-A והוא עובר דרך B. צובעים את כל הנקודות בתוך מעגל Ω שנמצאות מחוץ למעגל α. מצאו את השטח הצבוע.

2. אביאל מנסה לחשב את הפיתוח העשרוני של המספר

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\right)^3\left(1-\frac{1}{4}\right)^4\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)^{100},$$

אבל הוא התפסטן. עזרו לאביאל: האם הוא אמור לקבל פיתוח סופי או אינסופי? אם הפיתוח סופי, כמה ספרות אחרי הנקודה בפיתוח הוא אמור לקבל?

3. הוכיחו את הזהות: $\binom{n}{m}^2=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}\cdot\binom{m+k}{m-k}\cdot\binom{n}{m+k}$.

4. מצאו את כל הפולינומים הממשיים $p(x)$ עבורם מתקיים

$$p(\sin(x))=\sin(p(x))$$

לכל x ממשי.

בהצלחה!

15/2/2018 **מחנה חורף** ל' בשבט תשע"ח

קבוצת ירדן – תחרות בעל-פה

אין להשתמש במחשבון

5. האם אפשר לצייר 500 מעגלים במישור, כך שכל שניים שונים בגודלם, וגם על כל מעגל נמצאים מרכזים של לפחות 10 מעגלים אחרים?

6. נתון טרפז ישר זווית ABCD, עם זוויות ישרות A ו-B. המעגל ACD פוגש את הצלע BC שנית בנקודה E. נסמן ב-F את עקב האנך מ-E ל-AC. נקודה G נמצאת על המשך הצלע AB (מהצד של A), כך שהזוויות AGC ו-CED שוות. הוכיחו כי המרובע AGFD חסום במעגל.

7. לכל n טבעי, מהו הערך הקטן ביותר של C (ייתכן כי הוא תלוי ב-n) כך שעבור כל $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ המקיימים $x_1 + x_2 + ... + x_n = n$, בהכרח מתקיים גם:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \le \frac{C}{\prod_{i=1}^{n} x_i} + n - C \; ?$$

בהצלחה!

15/2/2018 **מחנה חורף** ל' בשבט תשע"ח

קבוצת רותם

1. יהא $ABCDE$ מחומש קמור בו מתקיים $AB = BC = CD$, $\sphericalangle EAB = \sphericalangle BCD$, $\sphericalangle EDC = \sphericalangle CBA$. הוכיחו כי האנך מ-$E$ ל-BC והקטעים AC ו-BD נפגשים בנקודה אחת.

2. מצאו את כל השלמים $n \geq 2$ עם התכונה הבאה: לכל סדרת שלמים $a_1, a_2, \ldots, a_n$ שסכומם לא מתחלק ב-n, קיים אינדקס $1 \leq i \leq n$ עבורו אף אחד מהמספרים

$$a_i, a_i + a_{i+1}, \ldots, a_i + a_{i+1} + \cdots + a_{i+n-1}$$

לא מתחלק ב-n. (מסמנים $a_j = a_{j-n}$ עבור $j > n$.)

3. סדרה אינסופית של ממשיים $a_1, a_2, \ldots$ מקיימת את הזהות

$$a_n = -\max_{i+j=n}(a_i + a_j)$$

לכל $n > 2017$. הוכיחו כי הסדרה חסומה, כלומר, קיים קבוע M עבורו $|a_n| \leq M$ לכל n.

בהצלחה!