

אי-שוויונים

1. מספרים לא שליליים a, b, c מקיימים $0 \neq 2(ab + ac + bc) = a^2 + b^2 + c^2$.

מצאו את הערך הקטן ביותר האפשרי של $\sqrt{\frac{ab}{a^2 + b^2}} + \sqrt{\frac{ac}{a^2 + c^2}} + \sqrt{\frac{bc}{b^2 + c^2}}$.

2. מספרים חיוביים x_1, x_2, \dots, x_n הראו כי $\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{x_k + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}} \leq \frac{n}{1 + \sqrt{n}}$.

3. מספרים לא שליליים a, b, c, d מקיימים $a + b + c + d = 3$. הוכיחו כי

$$\frac{a}{2b^3 + 1} + \frac{b}{2c^3 + 1} + \frac{c}{2d^3 + 1} + \frac{d}{2a^3 + 1} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{3}.$$

4. מספרים חיוביים x, y, z הוכיחו כי

$$\frac{3}{2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq (x + y + z) \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{y}{y^2 + z^2} + \frac{z}{z^2 + x^2} \right).$$

5. מספרים x, y, z לא שליליים. הוכיחו כי

$$(x^2 + y^2 + 1)(x^2 + z^2 + 1)(y^2 + z^2 + 1) \geq (4x - 1)(4y - 1)(4z - 1).$$

6. מספרים לא שליליים a, b, c מקיימים $ab + ac + bc + abc \geq 4$. הוכיחו כי

$$a + b + c \geq 3. \text{ א.}$$

$$a + b + c \geq 3 + \frac{(b - c)^2}{b + c + 4}. \text{ ב.}$$

7. מספרים לא שליליים a, b, c מקיימים $\sqrt{a + 2b + 1} + \sqrt{a + 2c + 1} = 4$. הוכיחו כי

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1) \leq 8. \text{ א.}$$

$$3 + \frac{1}{16}(b - c)^2 \leq a + b + c \leq 4. \text{ ב.}$$

8. מספרים חיוביים x, y, z מקיימים $xyz = 1$. הוכיחו כי

$$\frac{x}{x + y^2 + z^4} + \frac{y}{y + z^2 + x^4} + \frac{z}{z + x^2 + y^4} \leq 1.$$

9. מספרים לא שליליים a, b, c, d מקיימים $a + b + c + d = 4$. הוכיחו כי

$$abcd |(a - b)(b - c)(c - d)(d - a)| \leq 1.$$

10. מספרים x, y, z לא שליליים. הוכיחו כי

$$(x + y)^2 (x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz)^2 \geq 8(xy + xz + yz)^2 (x^2 + y^2).$$