

הקיצוני

1. כל אחד מבין 10 חברים ביקר במועדון במהלך הערב. הם הגיעו ועזבו בזמנים שונים (אף אחד לא חזר אחרי שהוא עזב). נתון שכל שניים נפגשו. הוכיחו שברגע מסוים כולם היו במועדון.
2. במשבצות של לוח שח רשומים מספרים ממשיים. כל מספר שווה לממוצע המספרים במשבצות הסמוכות. הראו שכל המספרים שווים.
3. בתוך פאון קמור נבחרה נקודה פנימית P. הראו שלפאון יש פאה, כך שעקב האנך מ-P למישור הפאה הזאת נמצא בתוך הפאה.
4. משולש נמצא בתוך מקבילית. הוכיחו כי שטח המשולש אינו עולה על מחצית שטח המקבילית.
5. הראו שהמספרים הבאים אינם שלמים:
- א. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ ב. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}$ ג. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{3n+1}$
6. גרף מלא על N קודקודים נהפך לגרף מכוון: כל קשת הוחלפה בחץ. הראו שיש קודקוד, שממנו אפשר להגיע לכל קודקוד אחר במהלך אחד או בשני מהלכים.
7. במשתה השתתפו 17 קניבלים. אסור לאכול אנשים שעוד לא נהרגו. הוכיחו שהיו 5 קניבלים שאכלו זה את זה בשרשרת, או 5 קניבלים שלא אכלו זה את זה.
8. במישור נתונים N נקודות אדומות ו-N נקודות כחולות במצב כללי. הוכח שאפשר לזווג אותן באמצעות N קטעים שלא נחתכים זה עם זה.
9. הוכיחו שאין מחומש, שכל קודקודיו נמצאים על השריג (כל הקואורדינאטות של קודקודיו בעלות ערכים שלמים) ושכל צלעותיו שוות (הערה: מחומש שכל צלעותיו שוות אינו בהכרח משוכלל).
10. במחומש קמור שכל קודקודיו נמצאים על השריג העבירו את כל האלכסונים האפשריים ליצירת כוכב מחומשי. הוכיחו שהמחומש הפנימי מכיל נקודה מהשריג.
11. הוכיחו שבכל קו חלק סגור קמור יש מסלול ביליארד סגור שמורכב מ-5 קטעים.
12. נתון קו עקום סגור קמור במישור. הראו שהקו מוכל במשולש, כך שאמצעי הצלעות של המשולש נמצאים על הקו.
- 13.* במישור העבירו מספר ישרים, שכל שניים מהם חותכים זה את זה ואף שלושה לא נפגשים בנקודה אחת. הראו שבסמוך לכל ישר יש משולש.
- 14.* במישור סומנו מספר סופי של נקודות והעבירו מספר סופי של ישרים. דרך כל שתי נקודות מסומנות הועבר ישר, וכל נקודה שבה נפגשים שני ישרים היא מסומנת. תארו את כל התמונות האפשריות מסוג זה.
- 15.* נתונה קבוצה של מלבנים במישור. לכל שני מלבנים, יש ישר אופקי או אנכי שחותך את שניהם. הראו כי קיים קו אופקי וקו אנכי, שכל מלבן חותך אחד מהם.
- 16.* נתונה פירמידה מנייר. חותכים את הנייר לאורך המקצועות שאינם מקצועות הבסיס, ומקפלים כל פאה פנימה, כך שתכסה חלק מסוים של הבסיס. הראו שכל הפאות ביחד יכסו את הבסיס כולו.

בתאבון!