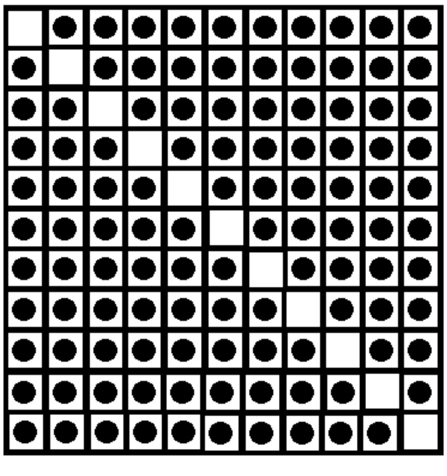
משחקים

1. שח כפול מתנהל לפי חוקי שחמט רגיל רק שבכל פעם שחקן עושה שני מהלכים רצופים. בהנחה שהלבן (אילה) משחק בצורה האופטימלית, האם השחור (ברווז) יצליח לנצח?

פתרון: לא. נניח בשלילה כי לשחור יש אסטרטגיה מנצחת.

הלבן במהלכו הראשון ילך עם הפרש מ ב1 ל ג3 ובמהלכו השני יחזיר אותו ל ב1. עכשיו הלוח נמצא במצבו ההתחלתי רק שהשחור מתחיל, והלבן יוכל להשתמש באסטרטגיה של השחור לנצח, בסתירה. לכן הלבן יכול להבטיח כי יסיג לפחות תיקו.

2. אילה וברווז משחקים במשחק הבא: בהתחלה על השולחן מונחות 11 ערימות של 10 אבנים כל אחת. כל שחקן בתורו לוקח 1, 2 או 3 אבנים, אבל אילה במהלך שלה לוקחת את כל האבנים מערימה אחת, וברווז לוקח את כל האבנים מערימות שונות. אילה מתחילה. מפסיד מי שלא יכול לבצע מהלך. למי מהשחקנים יש אסטרטגיה מנצחת?



פתרון: לברווז. ברווז יסדר את האבנים כמו שמתואר בציור. בכל מהלך אילה יכולה לקחת 2,1, או 3 אבנים מעמודה אחת ועל כל מהלך של אילה, ברווז ייקח את האבנים הסימטריות ביחס לאלכסון לאבנים שאילה לקחה. ברור

שהאבנים הסימטריות שברווז ירצה לקחת יהיו בעמודות שונות. כך על כל מהלך של אילה לברווז יש מהלך סימטרי ובגלל שהמשחק סופי הוא יסתיים ולאילה לא יהיה מהלך וברווז ינצח.

3. לאילה וברווז חמישה דליים ריקים בגודל שני ליטרים. הם משחקים במשחק הבא: בכל תור של אילה היא מרוקנת בקבוק של ליטר מים לתוך חמשת הדליים כרצונה. בכל תור של ברווז הוא בוחר שני דליים רצופים ומרוקן אותם. אילה תנצח אם היא תצליח לגרום לאחד הדליים "לעלות על גדותיו", אחרת ברווז ינצח. למי יש אסטרטגיה מנצחת?

פתרון: ברווז ינצח. נסמן את כמות המים בדליים ב-v_1, v_2, v_3, v_4, v_5

מצב יקרא טוב אם $v_i + v_{i+2} \leq 1$ לכל i. ברור שאם ברווז יצליח לשמור על כך שלאחר מהלכו יתקבל מצב טוב הוא ינצח כיוון שבמצב טוב בכל דלי יש לכל היותר ליטר מים אחד ולכן גם אם אילה תשפוך את כל המים לדי אחד לא יהיה שם יותר משני ליטרים.

נניח כי לאחר מהלכו של ברווז הגענו למצב טוב ונוכיח כי גם במהלכו הבא הוא יצליח לגרום למצב טוב. המצב היה טוב והיו שני דליים רצופים ריקים, נניח הראשון והשני. הצב טוב ולכן $v_3 + v_5 \leq 1$, וגם $v_4 = v_4 + v_1 \leq 1$ ולכן לאחר המהלך של אילה נדע כי

$v_1 + v_2 + v_3 + v_5 \leq 2$ כלומר או ש- $v_1 + v_3 \leq 1$ או ש-

$v_5 + v_2 \leq 1$. ללא הגבלת הכלליות נניח כי $v_1 + v_3 \leq 1$ אז ברווז ירוקן את הדלי הרביעי והחמישי ויקבל שוב מצב טוב מכיוון ש- $v_1 + v_3 \leq 1$, $v_4 = v_5 = 0$ ו- $v_2 \leq 1$.

נשאר לציין כי התחלנו ממצב טוב, הכל היה ריק, ולכן ברווז יוכל להבטיח כי לאחר מהלכו תמיד נגיע למצב טוב ועל כן אילה לא תוכל לנצח.

4. לאילה וברווז לוח משבצות בגודל 1×2000. כל אחד בתורו רושם את האות "ס" או את האות "ו" באחת מהמשבצות הריקות על פי

בחירתו. מי שיוצר את המילה "סוס" מנצח. אם לאחר שכל הלוח התמלא לא נוצרה המילה "סוס" מוכרז תיקו. מה תהיה תוצאת המשחק?

פתרון: משבצת ריקה תקרא רעה אם לאחר מהלך בה היריב מנצח במהלך הבא.

טענה: משבצת היא רעה אם ורק אם היא נמצאת בבלוק כזה:

"ס_ _ ס".

הוכחת הטענה: ברור כי המשבצות באמצע רעות כיוון שאם נרשום "ס" במשבצת ריקה מהבלוק היריב יוכל לרשום "ו" במשבצת הריקה השנייה וינצח, אך גם אם נרשום "ו" במשבצת ריקה מהבלוק היריב ירשום "ס" וינצח גם במקרה זה.

הכיוון ההפוך גם לא קשה. נתבונן במשבצת רעה, אם נרשום בה "ו" היריב ינצח ולכן מצד אחד של המשבצת חייבת להיות רשומה האות "ס" ומצדה השני חייב להיות ריק. אם נרשום "ס" במשבצת אז מכיוון שמצד אחד של המשבצת כבר רשום "ס" אז מצדה שני לאחר המשבצת הריקה חייב לבוא "ס" כלומר משבצת רעה חייבת להופיע בבלוק "ס _ _ ס".

נחזור לשאלה המקורית ונראה אסטרטגיה מנצחת בעבור ברווז.

במהלכו הראשון (לאחר המהלך הראשון של אילה) ברווז ירשום "ס"

במשבצת הרחוקה בלפחות 4 מהמשבצת בה אילה רשמה אות במהלך הראשון ובלפחות 4 מקצה הלוח נקרא למשבצת הזו A. לאחר מהלך השני של אילה לפחות באחד מהכיוונים מ-A שלושת המשבצות הבאות ריקות ולכן ברווז יוכל לרשום "ס" במרחק 3 מ-A וליצור את התבנית "ס _ _ ס".

נבחין כי בכל שלב במשחק תהיה כמות זוגית של משבצות רעות, זאת מפני שהוכחנו בטענה כי כל המשבצות הרעות נמצאות בתבנית "ס _ _ ס" שבה יש שתי משבצות רעות. יתר על כן בתחילת המשחק כמות המשבצות הטובות התה זוגית ובכל מהלך היא קטנה בכמות

אי-זוגית ולפיכך לפני התור של ברווז תהיה כמות אי-זוגית של משבצות טובות, כלומר שונה מ-0 ולכן ברווז יוכל לעשות מהלך שלא יגרום לאילה לנצח במהלך הבא שלה. מכיוון שכמות המהלכים סופית וברווז דאג ליצור משבצות רעות בשני מהלכיו הראשונים אילה תהיה חייבת לעשות מהלך למשבצת רעה וברווז ינצח.

5. נתון לוח משבצות 69×49, כל $70 \cdot 50$ הקודקודים שלו צבועים באדום. אילה וברווז משחקים במשחק הבא: מהלך מורכב מצביעת שתי משבצות אדומות בכחול והעברת הקטע המחבר את שתי הנקודות (שני קטעים יכולים להיחתך בפנים שלהם). השחקנים משחקים בתורות עד שכל המשבצות נצבעות בכחול. לאחר מכן, אילה מכוונת את כל הקטעים, כלומר כל קטע AB מחליפה בווקטור $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ או בווקטור $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$. אם אילה מצליחה לכוון את כל הקטעים כך שסכום הווקטורים שהתקבלו שווה ל-0 אז היא מנצחת. אחרת ברווז מנצח. למי יש אסטרטגיה מנצחת?

פתרון: אילה מנצחת. אילה תחלק את הקודקודים לזוגות: כל זוג מחובר על ידי צלע אופקית של אחת המשבצות.
במהלך הראשון שלה אילה תחבר שני קודקודים מזוג כלשהו.
לאחר מכאן אם ברווז יחבר שני קודקודים מאותו זוג אז אילה גם היא תחבר שני קודקודים מזוג אחד (כלשהו). לשני הקטעים שנוצרו כתוצאה מכך נקרא זוג קטעים מסוג א.
אך אם ברווז יחבר שני קודקודים מזוגות שונים אז אילה תחבר את שני הקודודים שנותרו מאותם שני הזוגות שברווז חיבר. לשני הקטעים שנוצרו כתוצאה מכך נקרא זוג קטעים מסוג ב.

נשים לב כי אילה תמיד יכולה לפעול על פי אסטרטגיה זו מכיוון שלאחר כל מהלך של אילה בכל זוג מהזיווג שבחרה שני הקודקודים צבועים בצבע זהה.

לאחר שיסיימו לצבוע את כל הקודקודים בכחול, בכל זוג קטעים מסוג א אילה תכוון את אחד הקטעים שמאלה ואת השני ימינה ולכן הם יתקזזו.

כעט אילה תטפל בקטעים מסוג ב. נשים לב כי אם אילה תכוון את אחד הקטעים שמאלה ואת השני ימינה (או להפך) יתקבל ווקטור אופקי באורך שתיים. אילה תנסה לצמצם את כל הווקטורים מאורך שתיים כמה שתוכל, ותצליח בהתאם לזוגיות כמות זוגות הקטעים מאורך 2. על כל פנים לבסוף או שכל הזוגות מסוג שתיים יצטמצמו או שישאר ווקטור אופקי מאורך 2.

בנוסף, נשים לב כי כמות הקודקודים על הלוח מתחלקת ב-4, כלומר כמות הזוגות מתחלקת בשתיים ולכן ברווז יבצע את המהלך האחרון. כבר ציינו כי לאחר כל מהלך של אילה כל הקודוקדים בכל הזוגות צבועים בצעים זהים ובשל זאת במהלכו האחרון ברווז יחבר שני קודקודים מאותו זוג.

עד כה אילה בחרה כיוונים לכל הקטעים פרט לשני קטעים אופקיים שאורכם אחד (הקטעים שנוצרו במהלך הראשון והאחרון) וקיבלה כי סכום כל הווקטורים הוא ווקטור האפס או ווקטור אופקי מאורך שתיים ולכן אילה תוכל לבחור כיוונים לשני הקטעים הנותרים כך שהכל יצטמצם והיא תנצח.

6. לאילה וברווז חפיסת קלפים המורכבת מ-1024 קלפים, על כל קלף רשומה קבוצה של ספרות עשרוניות (0 עד 9) שונות כך שעל כל שני קלפים שונים רשומות קבוצות שונות (על אחד הקלפים לא רשום כלום). אילה וברווז משחקים במשחק הבא: כל אחד בתורו בוחר קלף אחד מהחפיסה ולוקח אותו. כאשר כל הקלפים חולקו כל אחד בודק האם הוא יכול לזרוק קלף אחד כך שכל ספרה תופיע על מספר זוגי של קלפים שלו. אם שחקן אחד יכול לעשות זאת והשני לא אז הוא המנצח, אחרת מוכרז תיקו.

א. הוכיחו כי לאילה יש אסטרטגיה מנצח.

ב. עבור אילו מהלכים ראשונים של אילה עדיין תהיה לה אסטרטגיה מנצחת?

פתרון: א. נראה כי לא יתכן תיקו במשחק. נזכיר כי הפרש סימטרי של שתי קבוצות A, B מוגדר כך: $A\Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. נגדיר

סכום של שני קלפים להיות ההפרש הסימטרי של הקבוצות שלהן. נוח לחשוב על סכום של מספר קלפים כעל קבוצת ספרות המופיעות מספר אי זוגי על כל קלף.

נשים לב כי כל ספרה רשומה על בדיוק 512 קלפים ועל כן הסכום של כל הקלפים הוא הקבוצה הריקה, אי לכך סכמי הקלפים של אילה ושל ברווז יהיו שווים, נסמן אותו ב-C. השחקן שבידו קלף עם הקבוצה C עליו יכול לזקור אותו ויקבל כי הסכום של כל הקלפים שישארו לו יהיה שווה לקבוצה הריקה, כלומר כל מספר מופיע על מספר זוגי של קלפים שלו. בנוסף נשים לב כי השקן שאין לו את הקלף C לא יכול לגרום לסכום הקלפים שלו להפוך לקבוצה הריקה ולכן תמיד יש מנצח במשחק.

נוכיח כי ברווז לא יכול לנצח. נניח בשלילה כי לברווז יש אסטרטגיה מנצחת. אילה נכין חפיסת קלפים נוספת והם ישחקו שני משחקים במקביל: בהתחלה אילה עושה מהלך במשחק הראשון, לאחר מכן ברווז מגיב לה ואז אילה עושה מהלך במשחק השני וברווז מגיב לה, וכך האלה.

במהלכה הראשון במשחק הראשון אילה תיקח את הקלף A_1 וברווז יגיב למהלך הזה ויקח את B_1, אז אילה תיקח את B_1 במשחק השני וברווז יגיב ויקח את A_2, אז אילה תיקח את A_2 במשחק הראשון וברווז יגיב B_2 וקח האלה. בשלב כלשהו ברווז יקח את A_1 ברגע זה הקלפים של אילה במשחק הראשון הם בדיוק הקלפים של ברווז במשחק השני ולהפך, אם החפיסה עוד לא נגמרה אילה תיקח איבר אקראי מהחפיסה ותבצע את התהליך שלה שוב.

כאשר כל הקלפים יחולקו הקלפים של אילה במשחק השני הם בדיוק הקלפים של ברווז במשחק הראשון ולהפך ולכן אם ברווז יכול לנצח במשחק הראשון אז אילה יכולה לנצח במשחק השני, בסטירה לכך שלברווז יש אסטרטגיה מנצחת.

ב. נוכיח כי אם במהלכה הראשון אילה לא לקחה את הקלף הריק היא תנצח, ואחרת ברווז ינצח.

קודם נוכיח למה: יהיה B לא ריק. נחלק את כל הקלפים ל-512 זוגות מהצורה $(X, X\Delta B)$. נבחר קלף אחד מכל זוג, ונטען כי הסכום של כל הקלפים שבחרנו שווה לקבוצה הריקה או ל-B.

הוכחת הלמה: יהיה $b \in B$. בכל זוג נסמן ב-Y_i את הקלף מהזוג שמכיל את b ו-Z_i הקלף שלא מכיל את b. נשים לב כי הקבוצות Z_i אילו בדיוק כל הקבוצות שלא מכילות את b, בשל זאת כל ספרה

$x \neq b$ רשומה על בדיוק 256 מכל ה-Z_i-ים ולכן

$Z_1 \Delta Z_2 \Delta \dots \Delta Z_{512} = \emptyset$. אם נחליף את Z_i ב-Y_i זה שקול ללהוסיף B לסכום, כלומר סכום של 512 קלפים כך שיש כלף מכל זוג שווה לקבוצה הריקה או ל-B.

כעת נוכיח כי אם אילה לוקחת את הקלף הריק אז ברווז יכול לנצח:

ברווז יקח כלף אקראי, נסמנו ב-A ונניח כי אילה תיקח את B אז ברווז יענה ב- $A\Delta B$. עכשיו ברווז יחלק את כל הקלפים לזוגות $(X, X\Delta B)$ וכל פעם שאילה תיקח כלף ברווז יקח את הקלף השני מהזוג המתאים. נתבונן על המצב בסוף המשחק ונניח לרגע כי ברווז קיבל את הקלף הריק במקום A, אז הוא קיבל קלף אחד מכל זוג ולכן על פי הלמה סכום הקלפים של ברווז הוא $\emptyset$ או B, עכשיו נחזיר לברווז את A במקום הקלף הריק ונקבל כי סכום הקלפים שלו הוא A או $A\Delta B$ אבל לברווז יש את שני הקלפים האלו ולכן הוא ינצח.

נשאר להוכיח כי אם אילה לוקחת קלף לא ריק במהלכה הראשון היא תוכל לנצח:

הרעיון הוא לגנוב את האסטרטגיה של ברווז שראינו, נגנוב אותה בצורה דומה למה שעשינו בסעיף א.

במהלכה הראשון אילה תיקח קלף אקראי ותסמנו B. נניח כי ברווז יקח את $A \neq \emptyset$ אז אילה תיקח את $A\Delta B$ ותחלק את כל הקלפים לזוגות $(X, X\Delta B)$. הקלפים שנשארו בחפיסה מחולקים לזוגות ועוד קלף מיותר ללא זוג (בהתחלה זה הקלף הריק). כל פעם שברווז יקח קלף מזוג שלם אילה תיקח את הקלף השני מהזוג וכאשר ברווז יקח את הקלף המיותר אילה תיקח קלף מזוג כלשהו והקלף השני מהזוג

יהפוך לקלף המיותר החדש. נשים לב כי במהלכו האחרון ברווז חייב לקחת את הקלף המיותר ולכן בסוף המשחק הקלפים יתחלקו כך: לאילה יהיה את הזוג $(\mathrm{A}, \mathrm{A}\Delta\mathrm{B})$, לברווז יהיה את הזוג $(\emptyset, B)$ ובנוסף לכל אחד יהיה בדיוק כלף אחד משאר הזוגות, כלומר המצב זהה למצב של המקרה בו אילה לקחה את הקלף הריק במהלכה הראשון רק שאילה וברווז התחלפו ולכן במקרה הזה אילה תנצח.

נשאר להגיד כי אם במהלכו הראשון ברווז יקח את הקלף הריק אז אילה תחלק את כל הקלפים לזוגות על פי איזשהו B לבחירתה ותיקח את $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}$ ולאחר מכן תפעל על פי האסטרטגיה שתיארו לעיל.

3-3