

תרגיל 12

תזכורת: $x|y$ מסמן y מתחלק ב- x (אפשר גם להגיד x מחלק y).

1. מצאו את כל הזוגות של מספרים ראשוניים (p, q) כך ש-

$$p^3 - q^5 = (p + q)^2$$

2. נתון מספר טבעי n ותת קבוצה $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ של הקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$, $k > 1$.

ידוע כי $n | a_i(a_{i+1} - 1)$ לכל $i = 1, 2, \dots, k-1$. הוכיחו כי n לא מחלק את $a_k(a_1 - 1)$.

3. מצא את כל הפולינומים P , עם מקדמים שלמים כך ש- $n | P(2^n)$ לכל n טבעי.

4. מצאו את כל הפולינומים $P(x)$ עם מקדמים שלמים כך ש- $P(P(n) + n)$ ראשוני עבור אינסוף n -ים שלמים.

5. לכל פונקציה f נסמן $f^n(x) = f(f(\dots f(x)\dots))$ הפעלה של הפונקציה n

פעמים. נתון פולינום לא קבוע P עם מקדמים שלמים. הוכיחו כי לא קיימת פונקציה f

מהטבעיים לטבעיים כך שכמות המספרים השלמים x עבורם $f^n(x) = f(x)$ שווה

ל- $P(n)$ לכל $n \geq 1$.

6. הוכיחו כי קיימים אינסוף זוגות (m, n) של מספרים טבעיים כך שמתקיים:

$$m + n | (m!)^n + (n!)^m + 1$$