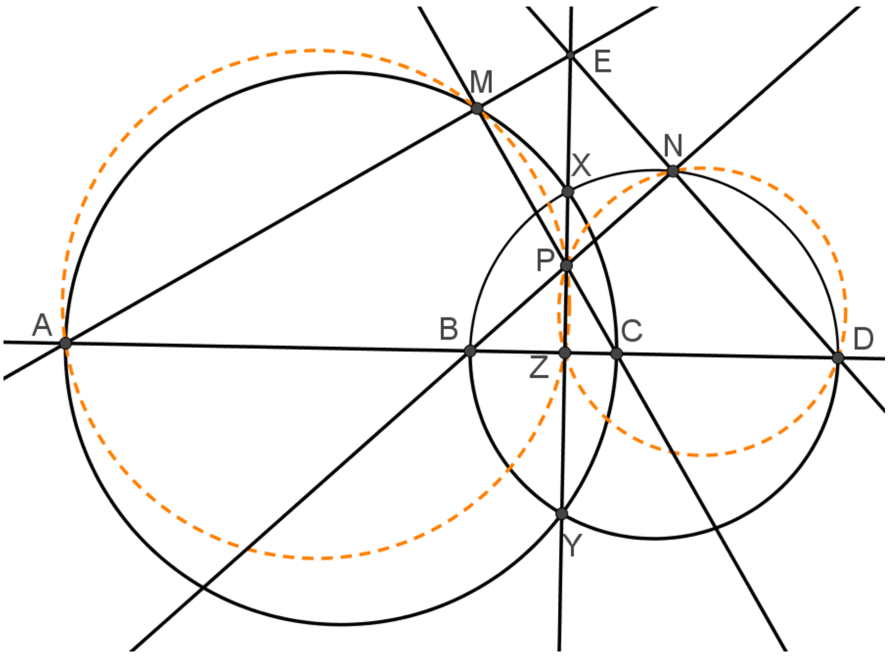
תרגיל 11

1. תהיינה D,C,B,A ארבע נקודות שונות על ישר אחד, בסדר זה. המעגלים עם הקטרים AC ו- BD נחתכים ב-X ו-Y. הישר XY חותך את BC ב-Z. נבחרה נקודה P על ישר XY שאינה Z. הישר CP חותך שנית את המעגל שקוטרו AC בנקודה M. הישר BP חותך שנית את המעגל שקוטרו BD בנקודה N. הוכיחו כי הישרים XY,DN,AM נחתכים בנקודה אחת.

פתרון: ברור שהישר XY מאונך ל-AD ולכן המרובעים AZPM ו-DZPN חסומים במעגלים עם קטרים AP ו-DP בהתאמה. נסמן את המעגלים DNPZ,AMPZ,DNB,AMC ב- $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ בהתאמה.



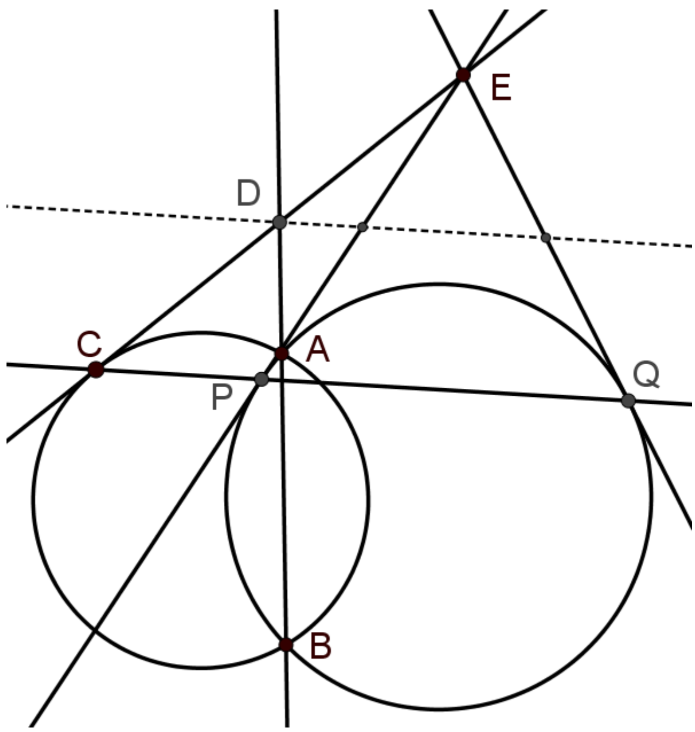
נסמן את החיתוך של PZ עם DN ב-Q. נשים לב שהציר הרדיקלי של ω_1 ו- ω_3 זה DN, הציר הרדיקלי של ω_1 ו- ω_2 זה PZ ולכן ל-Q דרגה שווה ביחס ל-$\omega_1, \omega_2, \omega_3$. בנוסף הציר הרדיקלי של ω_3 עם ω_4 זה XY שידוע גם בתור PZ, ולכן ל-Q דרגה זהה ביחס ל- $\omega_1, \omega_3, \omega_4$ ולכן ל-Q דרגה זהה ביחס לארבעת המעגלים ובפרט ביחס ל- ω_2 ו- ω_4 אבל הציר הרדיקלי שלהם זה AM ולכן Q נמצא על שלושת הישרים שרצינו להוכיח שנחתכים בנקודה.

2. נתונים שני מעגלים ω_1 ו-ω_2 הנחתכים ב-B,A. בנוסף נתונה נקודה C על ω_1.
המשיק ל-ω_1 ב-C חותך את AB ב-D. השיקוף של C ביחס ל-D יסומן ב-E. המשיקים ל-ω_2 דרך E משיקים לו בנקודות Q,P. הוכיחו כי CPQ ישר.

פתרון: נשתמש במשפט הצירים הרדיקליים על שלשת המעגלים: ω_1, ω_2, E (המעגל E זה מעגל שמרכזו ב-E ורדיוסו 0). בשביל זה נצטרך להבין מה זה ציר רדיקלי של מעגל ונקודה.

למה: נתון מעגל ω ונקודה A מחוץ למעגל. מעבירים משיק מ-A ל-ω, נקודת ההשקה תסומן ב-B. הציר הרדיקלי של ω ו-A עובר דרך אמצע AB.

הוכחת הלמה: נסמן את אמצע AB ב-C. הדרגה של C ביחס ל-ω BC^2 והדרגה של C ביחס ל-A שווה ל-AC^2 ולכן C נמצאת על הציר הרדיקלי בגלל ש-C נמצאת באמצע בין B ל-A.



נחזור לפתרון השאלה. הציר הרדיקלי של ω_1 ו-ω_2 זה AB. לפי הלמה הציר הרדיקלי של E ו-ω_1 עובר ב-D, אבל גם AB עובר

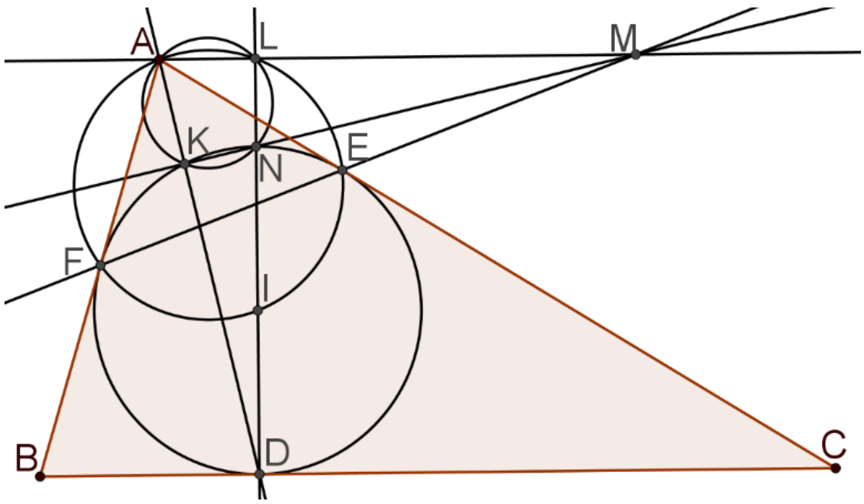
ב-D ולכן גם הציר הרדיקלי של E ו-ω_2 צריך לעבור ב-D. אבל לפי הלמה הציר הרדיקלי E ו-ω_2 עובר באמצע EP ואמצע EQ ולכן אחרי הומותטיה פי שתיים מ-E מקבלים ש-PQ עובר דרך C וזה בדיוק מה שרצינו להוכיח.

3. נתון משולש ABC, המעגל החסום במשולש יסומן ω. נקודות ההשקה של ω עם הצלעות AB,AC,BC יסומנו F,E,D בהתאמה. AD חותך את ω שנית בנקודה K. האנך ל-AD דרך K חותך את EF בנקודה M. הוכיחו כי AM מקביל ל-BC.

פתרון: נסמן את המרכז של ω ב-I ואת החיתוך של KM עם ω ב-N, ברור ש-N זו הנקודה הנגדית ל-D על ω ולכן I, D ו-N על ישר. בנוסף נגדיר את הנקודה L בתור החיתוך של DN עם הישר דרך A המקביל ל-BC. נשים לב ש-L נמצאת על המעגל שקוטרו AL, בגלל ש-LN מאונך ל-BC ו-AL מקביל ל-BC. אבל גם K נמצא על המעגל הזה ולכן המרובע ALNK חסום.

בנוסף המרובע ALEF חסום במעגל שקוטרו AI כי AE מאונך ל-EI בגלל שהמשיק מאונך לרדיוס ואמרנו כבר ש-AL מאונך ל-LN שהוא גם LI.

עכשיו נפעיל את משפט הצירים הרדיקליים על שלשת המעגלים ALEF,ALNK ו-ω :

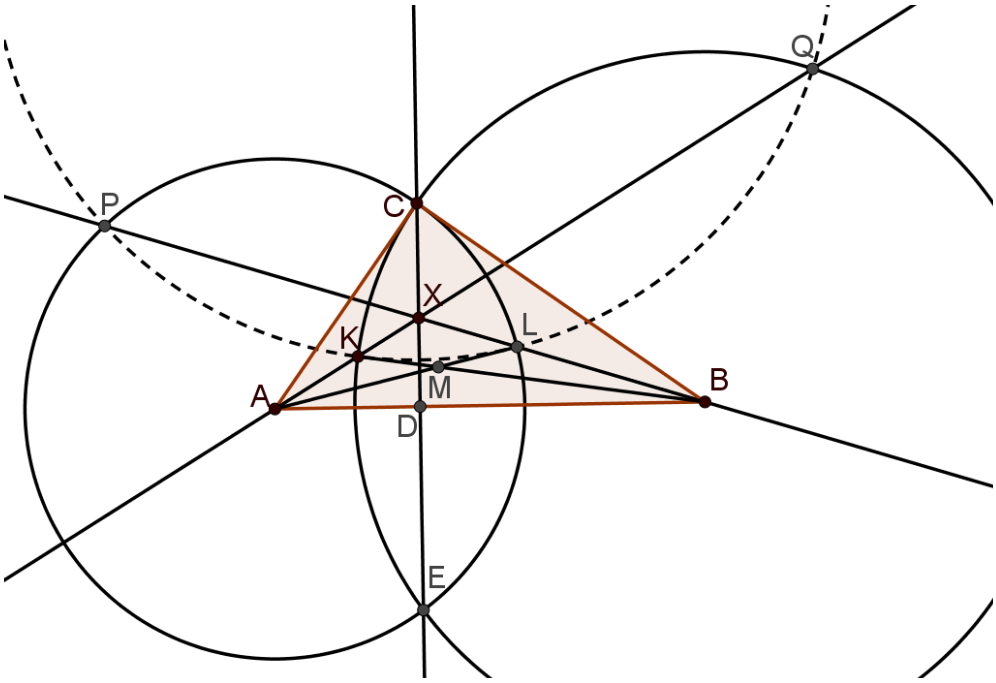


הציר הרדיקלי של ALNK עם ALEF זה AL, הציר הרדיקלי של ALNK עם ω זה KN והציר הרדיקלי של ALEF עם ω זה EF ולכן KN,EF ו-AL נחתכים בנקודה אבל החיתוך של KN עם EF זה M ולכן ALM ישר אבל AL מקביל ל-BC לפי הגדרתו ולכן AM מקביל ל-BC.

4. נתון משולש ישר זווית ABC (הזווית C ישרה). עקב האנך מ-C יסומן D. בנוסף נתונה נקודה X על הקטע CD ושתי נקודות L,K על הקטעים BX,AX בהתאמה כך ש-BC=BK ו- AC=AL. החיתוך של AL עם BK יסומן M. הוכיחו כי ML=MK.

פתרון: השיקוף של C ביחס ל-AB יסומן ב-E. נסמן ב-ω_1 את המעגל שמרכזו ב-A ו-AC רדיוסו וב-ω_2 את המעגל שמרכזו ב-B ו-BC רדיוסו. החיתוכים של AX,BX עם ω_2,ω_1 יסומנו Q,P בהתאמה.

ברור מהגדרתם של L ו-E שהם נמצאים על ω_1 ומהגדרתם של K ו-E ברור שהם נמצאים על ω_2. נעביר את המעגל QLP ונסמן אותו ב-ω_3.



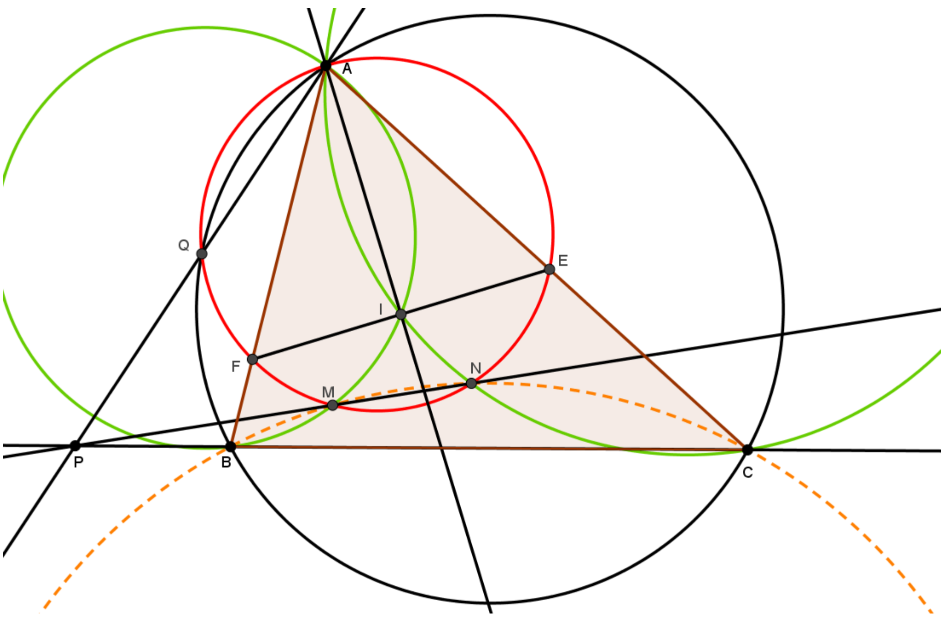
עכשיו נפעיל את משפט הצירים הרדיקליים על שלושת המעגלים $\omega_3, \omega_2, \omega_1$: הציר הרדיקלי של ω_1 עם ω_2 זה ברור EC, הציר הרדיקלי של ω_1 עם ω_3 זה LP, החיתוך של EC עם LP זה X ולכן גם הציר הרדיקלי של ω_2 עם ω_3 צריך לעבור ב-X. אבל ברור שהוא עובר ב-Q ולכן הציר הרדיקלי של ω_2 עם ω_3 זה XQ ולכן נקודת החיתוך השנייה של שני המעגלים הנ"ל נמצאת על XQ. אבל החיתוך של XQ עם ω_2 זה K ולכן K נמצאת גם על ω_3, כלומר הוכחנו שהמרובע QLKP חסום במעגל. בנוסף אמרנו ש-XQ הוא הציר הרדיקלי של ω_2 עם ω_3 ולכן A נמצא על הציר הרדיקלי של שני המעגלים, אבל AC משיק ל-ω_2 ו-AL=AC ולכן AL משיק ל-ω_3. בדיוק באותה צורה נוכיח ש-

BK משיק ל-ω_3. כלומר הוכחנו ש-AL ו-BK משיקים ל-ω_3 ולכן ML ו-MK משיקים ל-ω_3 ולכן הם שווים.

5. נתון משולש ABC ומרכז המעגל החסום במשולש שיסומן I. המעגל החוסם של המשולש יסומן ω. האנך ל-AI ב-I חותך את AB,AC ב-F,E בהתאמה. המעגלים AIC,AIB חותכים את המעגל AEF שנית בנקודות N,M בהתאמה, בנוסף המעגל AEF חותך את ω שנית בנקודה Q. הוכיחו כי MN,AQ ו-BC נחתכים בנקודה.

פתרון: נשים לב שאם נוכיח שהמרובע BMNC חסום במעגל אז ממשפט הצירים הרדיקליים על המעגלים: BMNC,ABC,AQMN נקבל ש-AQ- הציר הרדיקלי של AQMN עם ABC, BC-הציר הרדיקלי של BMNC עם ABC ו-MN- הציר הרדיקלי של AQMN עם BMNC נתכים בנקודה.

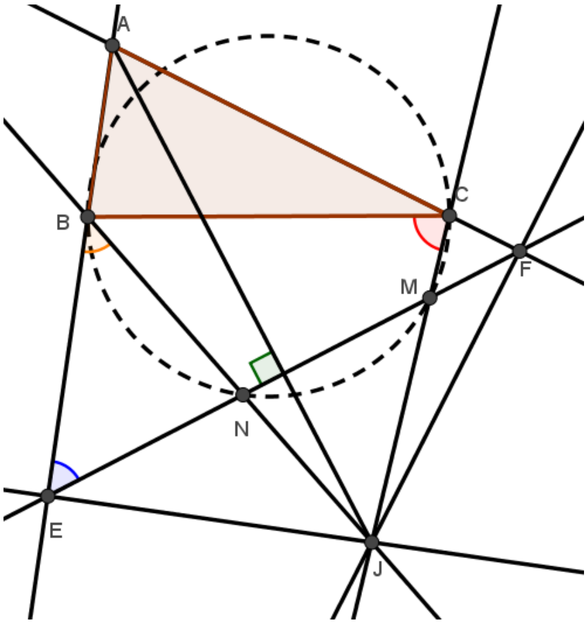
בשביל להוכיח ש-BMNC מעגל נעשה אינוורס שיקוף ב-A. נזכיר שאינוורס שיקוף ב-



A זה הרכבה של אינוורסיה שמרכזה ב-A ורדיוסה $\sqrt{AB \cdot AC}$ עם שיקוף ביחס לחוצה זווית A.

לאחר אינוורסיה נקבל את הלמה הבאה (שתסיים את פתרון השאלה):

למה: נתון משולש ABC, J מרכז המעגל החסום מבחוץ מול A. F,E הם ההיטלים של J על AC,AB בהתאמה. אם N,M הם החיתוכים של EF עם BJ,CJ אז המרובע BMNC חסום במעגל.



הוכחת הלמה: מספיק להוכיח שסכום שלושת הזוויות המסומנות בציור: הכחולה האדומה וכתומה שווה ל-180^o.

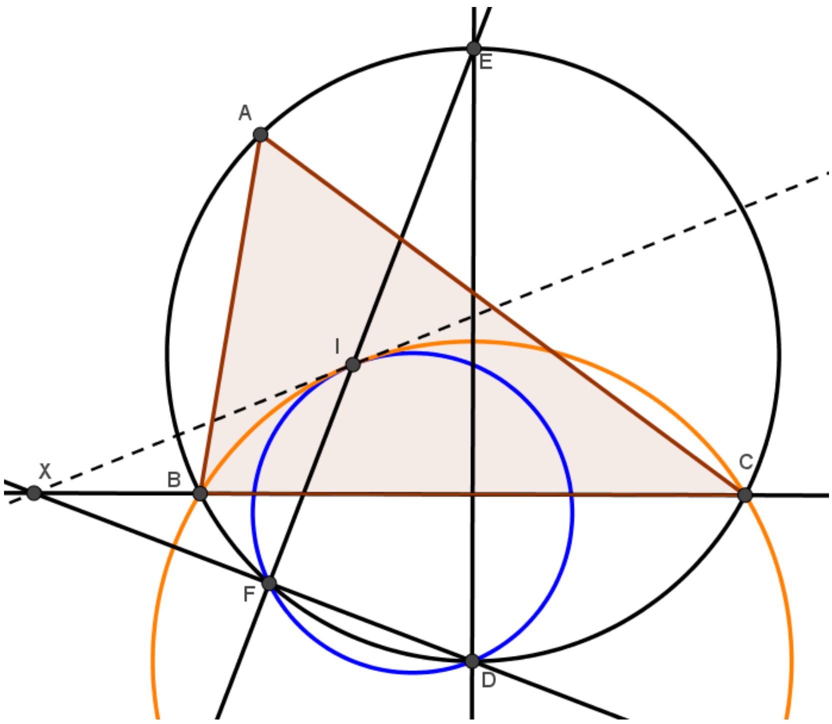
אבל הזווית הכתומה שווה $\frac{\alpha+\gamma}{2}$, הזווית האדומה שווה $\frac{\alpha+\beta}{2}$ והזווית הכחולה שווה $90^o-\frac{\alpha}{2}$ כאשר α,β,γ הן הזוויות של ABC, ולכן סכומן הוא $90^o+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=180^o$ והלמה הוכחה.

6. נתון משולש ABC ומרכז המעגל החסום במשולש שיסומן I. נסמן ב-D את אמצע הקשת BC וב-E את אמצע הקשת BAC. האנך מ-D ל-IE חותך את BC בנקודה X. באופן דומה נגדיר את Y,Z.

א. הוכיחו כי X,Y,Z נמצאים על ישר.

ב. הוכיחו כי ישר זה מאונך לישר OI, כאשר O זה מרכז המעגל החוסם של ABC שיסומן ω.

פתרון: נסמן את עקב האנך מ-D ל-EI ב-F. ברור כי F נמצאת על ω כי היא נשענת עם זווית ישרה על הקוטר של ω. נעביר את המעגל IDF, ובנוסף נעביר את המעגל BIC זהו מעגל הטלתן ולכן מרכזו ב-D.



כעת נפעיל את משפט הצירים הרדיקליים על שלשת המעגלים: ω, BIC, IDF. הציר הרדיקלי של ω עם BIC הוא BC, הציר הרדיקלי של ω עם IDF הוא DF ולבסוף הציר הרדיקלי של IDF עם IBC הוא המשיק המשותף שלהם ב-I כי שני המעגלים משיקים ב-I כי המרכז של BIC הוא D והמרכז של IDF נמצא על ID כי D קוטר.

מהמשפט קיבלנו כי IX משיק ל-IDF כלומר ל-X דרגה שווה ביחס ל-ω ולמעגל שמרכזו ב-I ורדיוסו 0 ולכן X נמצא על הציר הרדיקלי של שני המעגלים האלו, אך באותה צורה ניתן להוכיח שגם Y וגם Z נמצאים על הציר הרדיקלי הנ"ל ולכן שלושתם נמצאים על ישר והישר הזה מאונך לציר המרכזים של שני המעגלים שהוא IO.