

תרגיל 10

בכל השאלות הבאות יש למצוא את כל הפונקציות המקיימות את המשוואה. הפונקציה היא מהממשיים לממשיים אלה אם נאמר אחרת.

$$1. \quad f(x^3) + f(y^3) = (x+y)(f(x^2) + f(y^2) - f(xy))$$

פתרון: נציב $x = y = 0$ ונקבל ש- $2f(0) = 0$ ולכן $f(0) = 0$.

עכשיו אם נציב רק $y = 0$ אז נקבל:

$$(1) \quad f(x^3) = x \cdot f(x^2)$$

מהמשוואה הזו נקבל שתי מסקנות, הראשונה היא שהפונקציה אי-זוגית, זה נובע מכך

שאם נחליף סימן ל- x ב-(1) אז נקבל:

$$f(-x^3) = -x \cdot f(x^2) = -f(x^3)$$

והשנייה היא שהמשוואה המקורית הופכת ל-

$$\begin{aligned} x \cdot f(x^2) + y \cdot f(y^2) &= x \cdot f(x^2) + y \cdot f(y^2) + \\ &+ x \cdot f(y^2) + y \cdot f(x^2) - x \cdot f(xy) - y \cdot f(xy) \end{aligned}$$

כלומר:

$$(2) \quad x \cdot f(y^2) + y \cdot f(x^2) = x \cdot f(xy) + y \cdot f(xy)$$

נשנה סימן ל- y ב-(2) ונקבל:

$$(3) \quad x \cdot f(y^2) - y \cdot f(x^2) = -x \cdot f(xy) + y \cdot f(xy)$$

נחבר את (2) עם (3) ונקבל: $2x \cdot f(y^2) = 2y \cdot f(x^2)$

נציב $y = 1$ ונקבל ש- $f(x) = x \cdot f(1)$ לכל x .

נציב ונבדוק ש- $f(x) = ax$ פתרון של המשוואה לכל קבוע a .

$$a \cdot x^3 + a \cdot y^3 = (x+y)(a \cdot x^2 + a \cdot y^2 - a \cdot xy)$$

$$. f(x^2 + xy + f(y)) = (f(x))^2 + x \cdot f(y) + y \quad .2$$

פתרון: נסמן $f(0) = c$. נציב $x = 0$ ו- x במקום y , ונקבל:

$$(1) \quad f(f(x)) = c^2 + x$$

עכשיו נציב $y = 0$ ונקבל:

$$(2) \quad f(x^2 + c) = f(x)^2 + cx$$

נשנה סימן ל- x במשוואה האחרונה ונקבל

$$(3) \quad f(x^2 + c) = f(-x)^2 - cx$$

בנוסף, מההצבה $(-x, x)$ במשוואה המקורית מקבלים

$$(4) \quad f(f(x)) = (f(-x))^2 - x \cdot f(x) + x$$

נשווה בין (1) ל-(4) ונקבל $f(-x)^2 - x \cdot f(x) = c^2$

נשווה בין (2) ל-(3) ונקבל $f(-x)^2 = f(x)^2 + 2cx$

מشتי המשוואות האחרונות נובע ש-

$$(*) \quad f(x)^2 - x \cdot f(x) = c^2 - 2cx$$

הינו ממש שמחים לגלות את c .

לפי (1) הפונקציה חח"ע ועל. לכן קיים a עבורו $f(a) = 0$. נציב $x = a$ ב-(*) ונקבל:

$$0 = c(c - 2a)$$

אם $c \neq 0$ אז $c = 2a$. נציב $x = 4a$ במשוואה (*) ונקבל

$$f(4a)^2 - 4a \cdot f(4a) = c^2 - 8ac = 4a^2 - 16a^2 = -12a^2$$

$$(f(4a) - 2a)^2 + 8a^2 = f(4a)^2 - 4a \cdot f(4a) + 12a^2 = 0$$

לכן כל מחובר בצד שמאל מתאפס, בפרט $a = 0$.

ובכן, $f(0) = 0$ ולכן (*) הופך ל- $f(x)^2 - x \cdot f(x) = 0$.

נשים לב כי $f(x) \neq 0$ לכל $x \neq 0$, כי הפונקציה חח"ע, ולכן מקבלים ש- $f(x) = x$

לכל $x \neq 0$ אבל זה נכון גם כאשר $x = 0$ ולכן $f(x) = x$ לכל x וברור שזה פתרון

של המשוואה.

$$f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \text{ כאשר } f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right) + f\left(\frac{x+1}{x \cdot f(y)}\right) = f(y) \quad 3.$$

פתרון: נחפש הצבה כך ש- $y = \frac{x+1}{x \cdot f(y)}$ ולכן נציב $x' = \frac{1}{y \cdot f(y) - 1}$ ונקבל כי

$$f\left(\frac{y}{f(x') + 1}\right) = 0$$

הייתה בלתי חוקית כלומר $x' \leq 0$ ולכן $y \cdot f(y) \leq 1$ לכל y .

מהמשוואה המקורית נובע ש-

$$\frac{f(x+1)}{y} + \frac{x \cdot f(y)}{x+1} \geq f\left(\frac{y}{f(x+1)}\right) + f\left(\frac{x+1}{x \cdot f(y)}\right) = f(y)$$

או במילים אחרות:

$$\frac{f(x+1)}{y} \geq \frac{1}{x+1} \cdot f(y)$$

$$(x+1) \cdot f(x+1) \geq y \cdot f(y)$$

נציב $y = z + 1$ במשוואה האחרונה ונקבל:

$$(x+1) \cdot f(x+1) \geq (z+1) \cdot f(z+1)$$

עכשיו אם נציב $(z+1, x)$ במשוואה המקורית ונבצע את אותו התהליך נקבל אי-שוויון

בכיוון הפוך ולכן נקבל $u \cdot f(u) = v \cdot f(v)$ לכל $u, v > 1$ כלומר $f(x) = \frac{c}{x}$ לכל

$x > 1$.

נציב y ממש גדול משוואה המקורית ונקבל:

$$\frac{c \cdot f(x+1)}{y} + f\left(\frac{(x+1)y}{x \cdot c}\right) = \frac{c}{y}$$

$$\frac{c^2}{(x+1)y} + \frac{c^2 x}{(x+1)y} = \frac{c}{y}$$

לכן $c=1$. כלומר $f(x) = \frac{1}{x}$ לכל $x > 1$.

טענה: הפונקציה יורדת במובן החזק.

הוכח הטענה: נשים לב כי $x+1 > 1$ לכל $x > 0$ ולכן אפשר להפוך את המשוואה

$$f(y(x+1)) + f\left(\frac{x+1}{x \cdot f(y)}\right) = f(y)$$

כל מספר $z > y$ ניתן לרשום בצורה $z = y \cdot (x+1)$, ולכן

$$f(z) \leq f(z) + f(\dots) = f(y)$$

אבל הפונקציה מקבלת ערכים חיוביים ולכן הוכחנו את הטענה.

טענה 2: $f(y) = \frac{1}{y}$ לכל $y > \frac{1}{2}$.

הוכח הטענה: נוכיח כי $f(1) = 1$.

כבר קודם הוכחנו כי $y \cdot f(y) \leq 1$, בפרט $f(1) \leq 1$. בנוסף שלכל $\varepsilon > 0$ מתקיים

$$f(1) \geq 1 \text{ ו-} \frac{1}{1+\varepsilon} = f(1+\varepsilon) < f(1)$$

עכשיו נרצה להציב x, y כך ש- $\frac{1}{2} < y < 1$ אבל $y(x+1) > 1$ ו- $\frac{x+1}{x \cdot f(y)} > 1$. במילים

$$\frac{1}{y} - 1 < x < \frac{1}{f(y) - 1}$$

כלומר לכל $\frac{1}{2} < y < 1$. אנחנו רוצים להוכיח כי $\frac{1}{y} - 1 < \frac{1}{f(y) - 1}$ ואז נוכל לבחור x

בקטע הזה.

כלומר מספיק להוכיח כי $f(y) - 1 < \frac{y}{1-y}$, נוסיף אחד לשני האגפים ונקבל שמספיק

$$f(y) < \frac{1}{1-y} \text{ להוכיח כי}$$

אבל כבר הוכחנו כי $f(y) \leq \frac{1}{y}$ לכל y , בנוסף ה- y שלנו גדול מחצי וקטן מאחד ולכן

$$y > 1-y \text{ ולכן } \frac{1}{y} < \frac{1}{1-y} \text{ ולכן מקבלים בדיוק את מה שרצינו: } f(y) < \frac{1}{1-y} \text{ ולכן}$$

ההצבה שחיפשנו קיימת, אחרי שנציב אותה נקבל:

$$\frac{1}{y(x+1)} + \frac{x \cdot f(y)}{x+1} = f(y)$$

$$f(y) = \frac{1}{y} \text{ במילים אחרות: } 1 + xy \cdot f(y) = y(x+1) \cdot f(y) \text{ ולכן}$$

סיימנו להוכיח את הטענה.

עכשיו נוכיח באינדוקציה ש- $f(y) = \frac{1}{2^n}$ לכל $y \geq \frac{1}{2^n}$, את צעד האינדוקציה אפשר

להוכיח בדיוק כמו שהוכחנו את טענה 2, צריך רק להוכיח שגם $f(\frac{1}{2}) = 2$ ואת זה אפשר

להוכיח בדיוק באותה צורה כמו שהוכחנו ש- $f(1) = 1$. מאינדוקציה נקבל ש- $f(x) = \frac{1}{x}$

לכל $x > 0$. נשאר לבדוק שזה מקיים את התנאים אבל בעצם עשינו את זה כבר במהלך הפתרון.

$$f(f(x) - y^2) = (f(x))^2 - 2f(x) \cdot y^2 + f(f(y)) \quad .4$$

פתרון: נשים לב ש- $f \equiv 0$ הוא פתרון של המשוואה ומעכשיו נניח כי f לא זהותית 0.

$$\text{נציב } x = y = 0 \text{ ונקבל כי } f(f(0)) = (f(0))^2 + f(f(0)) \text{ לכן } f(0) = 0$$

עכשיו נציב רק $y = 0$ ונקבל:

$$(1) \quad f(f(x)) = (f(x))^2$$

ולכן אפשר לשכתב את המשוואה המקורית:

$$f(f(x) - y^2) = (f(x))^2 - 2f(x) \cdot y^2 + (f(y))^2$$

אגף ימין מזכיר ריבוע, אכן אם נציב $f(z)$ במקום y ונשתמש ב-(1), נקבל ש-

$$f(f(x) - f(f(z))) = (f(x) - f(f(z)))^2$$

כלומר לכל x ולכל y בתמונה, מתקיים ש-

$$(2) \quad f(f(x) - f(y)) = (f(x) - f(y))^2$$

היינו ממש שמחים להבין שכל מספר הוא מהצורה $f(x) - f(y)$, כאשר y בתמונה.

בשביל זה נקבע x במשוואה המקורית ונזיז את y . נקבל ש-

$$f(f(x) - y^2) - f(f(y)) = (f(x))^2 - 2f(x) \cdot y^2$$

בצורה כזאת נוכל לקבל קל מספר לא חיובי.

לכן לפי (2) כל מספר לא חיובי x מקיים $f(x) = x^2$.

כמסקנה, כל המספרים החיוביים בתמונה.

ומזה נובע שכל המספרים החיוביים בתמונה, אבל מ-(1) נובע כי $f(x) = x^2$ לכל x ,

ולכן לכל המספרים החיוביים. כלומר לכל x ממשי $f(x) = x^2$. נציב ונבדוק שזה מקיים

את תנאי השאלה:

$$(x^2 - y^2)^2 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot y^2 + (y^2)^2$$

וזה נכון. קיבלנו שני פתרונות: $f(x) = x$ ו- $f \equiv 0$.

$$5. \quad f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0} \text{ כאשר } f(f(x) + y) = f(x) + 3x + y \cdot f(y)$$

פתרון ראשון: נעשה סימטריזציה!

נתונה נוסחה עבור $f(f(x) + y)$ אז נציב $f(z) + y$ במקום y , ונקבל:

$$\begin{aligned} f(f(x) + f(z) + y) &= f(x) + 3x + (f(z) + y) \cdot f(f(z) + y) = \\ &= f(x) + 3x + (f(z) + y) \cdot (f(z) + 3z + y \cdot f(y)) \end{aligned}$$

אבל הביטוי $f(f(x) + f(z) + y)$ סימטרי ב- x, z ולכן גם הביטוי באגף ימין צריך

להיות סימטרי, נחליף בין x ל- z ונשווה בין שני הביטוי באגף ימין ונקבל:

$$\begin{aligned} f(x) + 3x + (f(z) + y) \cdot (f(z) + 3z + y \cdot f(y)) &= \\ = f(z) + 3z + (f(x) + y) \cdot (f(x) + 3x + y \cdot f(y)) \end{aligned}$$

נעביר אגפים ונצמצם, נקבל

$$\begin{aligned} y \cdot f(y) \cdot (f(z) - f(x)) &= y \cdot (f(x) + 3x - f(z) - 3z) + \\ + f(x) \cdot (f(x) + 3x) - f(z) \cdot (f(z) + 3z) &+ (f(z) + 3z) - (f(x) + 3x) \end{aligned}$$

מה שרשום כאן זה בעצם $f(y) = a + \frac{b}{y}$, אם קיימים x, z עבורם $f(z) \neq f(x)$.

גם אם לא קיימים x, z מסוג זה, כלומר f קבועה, הנוסחה נכונה, כאשר $b = 0$.

נשאר לבדוק איזה ערכים של a, b מתאימים עבור המשוואה המקורית. קודם כל, $a \geq 0$

וגם $b \geq 0$, אחרת לא לכל $x \in \mathbb{R}_{>0}$ מתקיים $a + \frac{b}{x} \in \mathbb{R}_{>0}$.

$$a + \frac{b}{a + \frac{b}{x} + y} = a + \frac{b}{x} + 3x + y \cdot \left(a + \frac{b}{y} \right)$$

$$\frac{bx}{ax + b + xy} = \frac{b}{x} + 3x + ay + b$$

אם $b = 0$ נקבל שלכל x, y חיוביים מתקיים $0 = 3x + ay$ וזה לא מתקיים ל- x גדול

מספיק. אם $b > 0$ אז עבור $x \rightarrow 0^+$ נקבל שאגף שמאל שואף ל-0, ואגף ימין גדול

ממש. לכן למשוואה שלנו אין אף פתרון.

פתרון שני:

טענה: $f(x)$ שואף לאינסוף כאשר x שואף לאינסוף.

הוכחת הטענה: נקבע את x ונשאיף את y לאינסוף, אם שני האגפים שואפים לאינסוף אז הוכחנו את הטענה. בשביל ששני האגפים לא ישאפו לאינסוף $f(y)$ צריך לשאוף ל-0 אבל אז גם $f(f(x)+y)$ ולכן באגף שמאל מקבלים משהו קטן ובאגף ימין משהו שלפחות $f(x) = 3x$ בסתירה.

מהטענה נובע שקיים קבוע חיובי a כך ש- $f(x) \geq 1$ לכל $x > a$.

לכן לכל $y > a$ ולכל x מתקיים

$$f(f(x)+y) > f(x)+y \cdot f(y) \geq f(x)+y$$

כלומר קיים קבוע חיובי b כך ש- $f(z) > z$ לכל $z > b$.

אי לכך לכל x ולכל $y > b$ מתקיים:

$$f(f(x)+y) > y \cdot f(y) > y^2$$

ולכן קיים קבוע חיובי c כך ש- $f(x) > \frac{x^2}{2}$ לכל $x > c$.

אבל קיים גם קבוע חיובי d עבורו $f(x) > c$ לכל $x > d$. לכן לכל $x > \max(a, d)$

$$f(f(x)+y) > \frac{1}{2}(f(x)+y)^2 > \frac{1}{2}(f(x))^2$$
 ולכל y מתקיים

אבל מהמשוואה המקורית נובע

$$f(f(x)+y) = f(x) + 3x + y \cdot f(y) < 4f(x) + y \cdot f(y)$$

משני אי-השוויונים האחרונים מקבלים:

$$4f(x) + y \cdot f(y) > \frac{1}{2}(f(x))^2$$

לכל x גדול מספיק, אבל זה בברור שקר כי הוכחנו שכאשר x שואף לאינסוף, כך גם $f(x)$ ולכן אי השוויון האחרון לא יכול להתקיים. לכן אין פתרון למשוואה.

$$. f(x + y \cdot f(x^2)) = f(x) + x \cdot f(xy) \quad .6$$

פתרון: נציב $y = 0$ ונקבל $f(x) = f(x) + x \cdot f(0)$. לכן $f(0) = 0$.

נסמן $f(1) = a$. נציב $x = 1$ ונקבל

$$f(1 + ay) = a + f(y)$$

אם $a \neq 1$ נוכל לפתור משוואה $1 + ay = y$ על ידי $y = \frac{1}{1-a}$, ואז נסיק $a = 0$. אבל

במקרה זה $0 = f(1) = f(y)$, וכך מקבלים פתרון $f \equiv 0$.

בכל מקרה אחר $a = 1$. במקרה זה מקבלים

$$(1) \quad f(1 + y) = 1 + f(y)$$

מהצבה $y = -1$ נקבל $0 = 1 + f(-1)$, כלומר $f(-1) = -1$.

נציב גם $x = -1$ במשוואה המקורית

$$f(-1 + y) = -1 - f(-y)$$

אבל לפי משוואה (1) מקבלים כי $f(-1 + y) = f(y) - 1$ לכן

$$f(y) - 1 = -1 - f(-y)$$

לכן הפונקציה אי-זוגית.

נניח שקיים $c \neq 0$ כך ש- $f(c) = 0$. אז גם $f(-c) = 0$, כלומר לה"כ $c > 0$. נציב

$x = \sqrt{c}$ ונקבל במשוואה המקורית:

$$f(x) = f(x) + \sqrt{c} \cdot f(\sqrt{c} \cdot y)$$

לכן $f(\sqrt{c} \cdot y) = 0$ לכל y , כלומר $f \equiv 0$. מקרה זה כבר היה, אז ניתן להניח שלכל

$c \neq 0$ גם $f(c) \neq 0$.

על מנת לאפס את אגף שמאל במשוואה המקורית אפשר להציב $y = -\frac{x}{f(x^2)}$ ונקבל

$$x \cdot f\left(\frac{x^2}{f(x^2)}\right) = f(x)$$

נרצה לשפר את ההצבה הזו שתהיה לנו דרגת חופש נוספת ולכן נציב $y = \frac{z-x}{f(x^2)}$ ונקבל:

$$(2) \quad f(z) = f(x) + x \cdot f\left(\frac{x(z-x)}{f(x^2)}\right)$$

עכשיו נרצה להגדיל את $\frac{x(z-x)}{f(x^2)}$ ב-1, ולכן נציב $y = \frac{z-x + \frac{f(x^2)}{x}}{f(x^2)}$ ונקבל

$$f\left(z + \frac{f(x^2)}{x}\right) = f(x) + x \cdot f\left(\frac{x(z-x)}{f(x^2)} + 1\right)$$

נציב את (2) במשוואה האחרונה, ונשתמש ב-(1) ונקבל

$$(*) \quad f\left(z + \frac{f(x^2)}{x}\right) = f(z) + x$$

זו משוואה טובה שמזכירה חיבוריות, נחליף את x ב- $f(x)$ ב-(*) ונקבל:

$$(**) \quad f\left(z + \frac{f((f(x))^2)}{f(x)}\right) = f(z) + f(x)$$

ובשביל לקבל חיבוריות מספיק להוכיח כי

$$(3) \quad \frac{f((f(x))^2)}{f(x)} = x$$

בשביל זה נאפס את אגף ימין ב-(**) על ידי הצבה $x = -z$, נקבל $f(\dots) = 0$ ולכן $\dots = 0$ כלומר

$$z - \frac{f((f(z))^2)}{f(z)} = 0$$

וזה בדיוק מה שהיה חסר. הוכחנו שהפונקציה חיבורית. נחזור למשוואה המקורית:

$$f(x) + f(y \cdot f(x^2)) = f(x + y \cdot f(x^2)) = f(x) + x \cdot f(xy)$$

$$f(y \cdot f(x^2)) = x \cdot f(xy)$$

המשוואה הזו מזכירה כפליות, נחליף את x ב- $f(x)$ במשוואה האחרונה ונקבל:

$$f\left(y \cdot f\left((f(x))^2\right)\right) = f(x) \cdot f(f(x)y)$$

נשתמש ב-(3) ונקבל ש-

$$f(y \cdot x \cdot f(x)) = f(x) \cdot f(f(x) \cdot y)$$

נציב $y = \frac{z}{f(x)}$ במשוואה האחרונה ונקבל

$$f(xz) = f(x)f(z)$$

לכל x, z . הוכחנו שהפונקציה חיבורית וכפלית ולכן היא חייבת להיות הזהות.

קל לראות שהזהות מקיימת את התנאים.