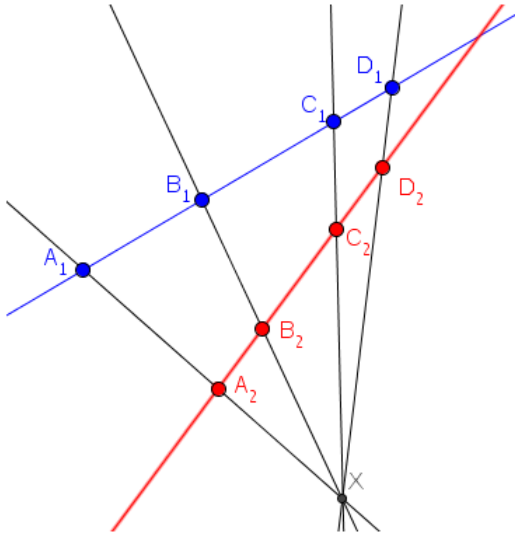


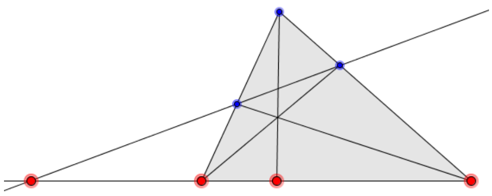
תזכורת על טענות שימושיות:

1. **הגדרה:** יחס כפול של 4 נקודות על ישר מוגדר כך: $[A,B;C,D]=\frac{AC}{BC}\Big/\frac{AD}{BD}$, כאשר היחס הוא בקטעים מכוונים. (הערה – יש חשיבות לסדר).
הטלה שומרת יחס כפול:
$$[A_1,B_1;C_1,D_1]=[A_2,B_2;C_2,D_2]$$

2. כאשר היחס הכפול שווה -1 הרביעייה נקראת **רביעייה הרמונית**.
קצוות הקטע, אמצע הקטע והנקודה האינסופית זו דוגמה ראשונה לרביעייה הרמונית.

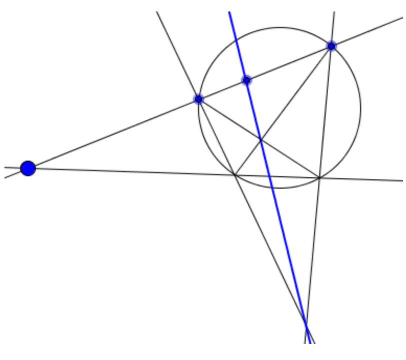
3. יחס כפול של רביעיית ישרים $[OA,OC;\,OB,OD]$ שעוברים בנקודה O זה יחס כפול של נקודות חיתוך שלהם עם ישר חמישי כלשהו לא דרך O (מסתבר שזה לא תלוי בבחירת הישר). בדומה מוגדרת רביעייה הרמונית של ישרים.

4. בהינתן שניונית S שעוברת בנקודות A, B, C, D לכל נקודה נוספת O על S היחס הכפול $[OA,OC;\,OB,OD]$ הוא אותו דבר (לא תלוי בבחירת O). לכן באופן טבעי מוגדר היחס הכפול של 4 נקודות על השניונית. כאשר היחס הוא -1 המרובע נקרא **מרובע הרמוני**. ניסוח שקול הוא שהמשיקים בקודקודים A ו-C נפגשים על הישר BD; ניסוח שקול אחר, במקרה של מעגל, זה ש- $AB\cdot CD=BC\cdot DA$. דוגמה פשוטה למרובע הרמוני היא דלתון חסום.



5. משילוב של משפטי צ'בה ומנלאוס מקבלים רביעייה הרמונית.

6. דואליות ביחס למעגל שמרכזו O: הישר p דואלי לנקודה P שאינברסית ביחס למעגל לעקב האנך מ-O ל- p. דואליות מחליפה בין נקודות לישרים, בצורה שהופכת קשר של הכלה.



7. הנקודות הכחולות בציור הן רביעייה הרמונית, והנקודה הכחולה מחוץ למעגל דואלית לישר הכחול.
מכאן **משפט ברוקר:** אם במרובע ABCD שחסום במעגל שמרכזו O האלכסונים נפגשים בנקודה X, זוגות הישרים של הצלעות הנגדיות נפגשים בנקודות Y וZ, אז במשולש XYZ הגבהים נפגשים בנקודה O.

תרגיל פרוייקטיבי

1. נתון משולש ABC בו H הוא מפגש הגבהים. אמצע הצלע BC תסומן ב- M. הישר דרך H שמאונך ל- HM חותך את הצלעות AB, AC בנקודות Y,X. הוכיחו כי HY=HX.

2. נתון משולש ישר זווית ABC, בו הזווית C ישרה. מעגל ω שעובר בA,B חותך את הצלעות CA ו- CB ב- D וב- E בהתאמה. הקטעים BD,AE נחתכים בנקודה P. המשיקים ל- ω בנקודות E,A נחתכים ב- Q. המעגל CPQ חותך את AC,BC ב- L,K. הוכיחו כי LK מאונך ל- PQ.

3. נתון משולש ABC בו BE,CF גבהים. חוצה הזווית מ- A חותך את EF,BC ב- M,N בהתאמה. נבחרה נקודה P כך ש- MP מאונך ל- EF ו-NP מאונך ל- BC. הוכיחו כי AP עובר דרך אמצע AB.

4. נתון משולש ABC. המעגל החסום משיק ל- BC ב- K ו- AD הינו גובה. M מוגדרת בתור אמצע AD. החיתוך של KM עם המעגל החסום יסומן בN. הוכח כי המעגל BNC משיק למעגל החסום.

5. במשולש ABC עקבי הגבהים הם D,E,F בהתאמה. אמצע BC יסומן ב- M, חיתוך HM עם EF יסומן ב- T, ומפגש המשיקים מ-C,B למעגל החוסם יסומן ב- P. הוכח כי T,D,P ישר.

6. נתון משולש ABC. Γ הינו המעגל החסום מבחוץ לצלע BC. נקודות ההשקה שלו לצלעות BC,CA,AB יסומנו ב- D,E,F בהתאמה. אמצע EF יסומן ב-M. המעגל החוסם של המשולש חותך את Γ בנקודות K,L כך שהנקודות F,K,L,E נמצאות על Γ בסדר הזה. אמצע הקשת BAC יסומן ב- N. החיתוך של KN עם AB יסומן ב- C_1, והחיתוך של AC עם NL יסומן ב- B_1. החיתוך של FL עם KE יסומן ב- G והחיתוך של AG עם המעגל ABC יסומן ב- P.
(א) הוכח כי N,D,P ישר.
(ב) הוכח כי C_1,B_1,G,M ישר.