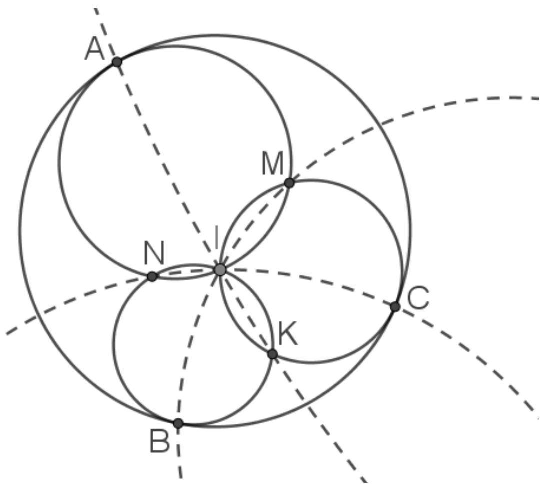
י' בניסן תשע"ח | **מחנה פסח** | 26/3/2018

קבוצת ירדן

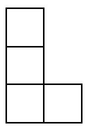
אין להשתמש במחשבון

1. א. איזה מספר יותר גדול: 7^{100} או 10^{85}?

ב. איזה מספר יותר גדול: 7^{100} או 10^{84}?



2. מעגלים α,β,γ משיקים למעגל ω בנקודות A, B ו-C בהתאמה.
המעגלים α ו-β נפגשים בנקודות I ו-N;
המעגלים α ו-γ נפגשים בנקודות I ו-M;
המעגלים β ו-γ נפגשים בנקודות I ו-K.
אף 3 נקודות מבין הנקודות שהוגדרו לא על ישר אחד. הראו שמרכזי המעגלים החוסמים של AIK, BIM, CIN נמצאים על ישר אחד.



3. על לוח משבצות 7×7 מניחים צורות L (מהסוג שבציור), כאשר כל צורת L צריכה לתפוס 4 משבצות שלמות של הלוח. אסור שתהיה צלע משותפת לשתי משבצות הלוח ששייכות לצורות L שונות. מצאו את המספר המרבי של צורות L. מותר לסובב ולשקף את הצורה.

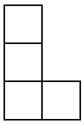
4. הציגו את הפולינום הבא כמכפלה של ארבעה פולינומים לא קבועים במקדמים שלמים:

$$P(x)=x^{13}-x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^{9}-x^{8}+x^{7}+x^{6}-x^{5}-x^{4}+x^{3}-x^{2}-x+1.$$

בהצלחה!

26/3/2018 **מחנה פסח** י' בניסן תשע"ח

קבוצת רותם



1. על לוח משבצות 7×7 מניחים צורות L (מהסוג שבציור), כאשר כל צורת L צריכה לתפוס 4 משבצות שלמות של הלוח. אסור שתהיה צלע משותפת לשתי משבצות הלוח ששייכות לצורות L שונות. מצאו את המספר המרבי של צורות L. מותר לסובב ולשקף את הצורה.

2. המעגלים α, β שניהם משיקים לקטע AB. הנקודות X, Y, Z, W הן הנקודות האינוורסיות לנקודות A, B דרך המעגלים α, β. (עושים אינוורסיה לכל זוג של נקודה ומעגל). התברר שהמרובע XYZW חסום במעגל, שמרכזו O. הראו כי הנקודה O ושתי נקודות החיתוך של α, β, נמצאות על ישר אחד.

3. מצאו את כל השלשות של מספרים טבעיים (a,p,b) כך ש-p ראשוני, $\gcd(a-1,b+1)=1$, וקיימים $p-1$ מספרים אי-זוגיים $c_1,c_2,...,c_{p-1}$ גדולים מ-1, כך ש-$a^p-p=b^{c_1}+b^{c_2}+...+b^{c_{p-1}}$.

בהצלחה!

27/3/2018 **מחנה פסח** י"א בניסן תשע"ח

תחרות קבוצתית

1. לכל מספר טבעי N נגדיר את המספר N^* שברישום העשרוני שלו יש את אותן הספרות שרשומות בסדר הפוך. כך למשל, $2018^* = 8102$, $1700^* = 0071$.
מצאו את כל המספרים הטבעיים k בעלי התכונה, שלכל N שמתחלק ב- k, גם N^* מתחלק ב- k.

2. במישור סומנו 6 נקודות שאף שלוש מהן לא על ישר אחד. שחר מזווג את הנקודות לזוגות, כך שהקטעים שמחברים בין כל שני זוגות לא נחתכים. מהי הכמות המינימלית ומקסימלית של דרכים בהן שחר יכול לזווג את הנקודות?

3. נסמן ב- Δ את שטח המשולש המשוכלל שצלעותיו באורך 1, וב- Θ את שטח המצולע המשוכלל בעל 9 צלעות שצלעותיו באורך 1. מצאו שלמים m ו- n כך ש-

$$\Theta - 3\Delta = m \cdot \sin 40^\circ + n \cdot \sin 80^\circ .$$

4. נתונים שישה מספרים שלמים: $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ שמקיימים

$$\gcd(a_1 - a_2, b_1 - b_2) = \gcd(a_1 - a_3, b_1 - b_3) = \gcd(a_2 - a_3, b_2 - b_3) = 1.$$

מסתבר שלמערכת משוואות אי-השוויונים

$$\begin{cases} (a_1 - x)(b_2 - y) > (a_2 - x)(b_1 - y) \\ (a_2 - x)(b_3 - y) > (a_3 - x)(b_2 - y) \\ (a_3 - x)(b_1 - y) > (a_1 - x)(b_3 - y) \end{cases}$$

יש פתרון אחד לפחות במספרים שלמים, ולכל פתרון בשלמים למערכת מתקיים $x = y$.
מצאו את כל הערכים האפשריים של $a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + a_3 - b_3$.

5. נקודות $\mathrm{A, B, C, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5}$ במישור נבחרו כך שהמשולשים $\mathrm{CP_1P_2}$, $\mathrm{AP_2P_3}$, $\mathrm{BP_3P_4}$, $\mathrm{CP_4P_5}$ משוכללים ומכוונים נגד כיוון השעון. הראו כי למשולש $\mathrm{AP_1P_4}$ יש תיכון שאורכו זהה לאחד התיכונים של המשולש $\mathrm{BP_2P_5}$.

6. נתון פולינום $p(x) = 2018x^{16} + 2018^2 x^8 + 2018^4 x^4 + 2018^8 x^2 + 2018^{16} x$.
מצאו את המחלק המשותף המקסימלי של $\{p(2), p(3), p(5), p(7), p(11), ...\}$.

7. מצאו את הערך המקסימלי האפשרי של $a^3 + b^3 + c^3$ כאשר a, b, c מספרים ממשיים שמקיימים $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2$ וגם $abc \le \dfrac{4}{27}$.

8. אלברט רוצה לרשום סדרה אינסופית של אפסים ואחדים, אבל לפני זה הרמן רושם M רצפים בינאריים באורך 6 שאסור שהם יופיעו באופן רצוף ברישום. מהו ה-M הקטן ביותר, עבורו הרמן יכול לגרום לכך שאלברט לא יצליח לכתוב את הסדרה האינסופית?

בהצלחה!

28/3/2018 **מחנה פסח** י"ב בניסן תשע"ח

קבוצת ירדן – תחרות בעל-פה

אין להשתמש במחשבון

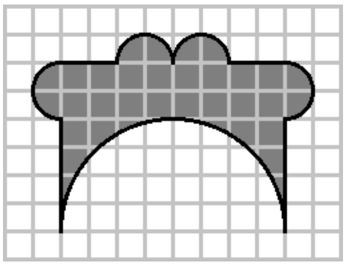
1. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ כך שלכל שני מספרים שלמים x,y מתקיים

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y).$$

2. נקודות A, B, C, D, E, F נמצאות על מעגל אחד. הראו כי

$$S_{\mathrm{ABC}}S_{\mathrm{CDE}}S_{\mathrm{EFA}}S_{\mathrm{BDF}}=S_{\mathrm{BCD}}S_{\mathrm{DEF}}S_{\mathrm{FAB}}S_{\mathrm{ACE}}.$$

3. חלקו את הצורה בציור ל-6 חלקים דומים זה לזה (היקף הצורה מורכב מקטעים ישרים ו-5 חצאי מעגלים).



4. מצאו את כל הפתרונות השלמים של המשוואה $a^5-b^4=15$.

בהצלחה!

28/3/2018 **מחנה חורף** י"ב בניסן תשע"ח

קבוצת ירדן – תחרות בעל-פה

אין להשתמש במחשבון

5. לקוסם יש תריסרון משוכלל מכושף, וכל קודקוד שלו נמצא תמיד באחד משני המצבים: דלוק או כבוי. הקוסם מסוגל לשנות בבת אחת את המצב של 4 מקודקודיו שהם קודקודים של ארבעון משוכלל, או של 5 קודקודים שנמצאים על פאה אחת. האם באמצעות פעולות כאלה הוא יכול להביא את התריסרון הקסום לכל מצב לפי רצונו?

6. מה יותר גדול: 1 או $\frac{1}{\sqrt[100]{2}}+\frac{1}{100}\cdot\left(\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\frac{1}{103}+...+\frac{1}{199}+\frac{1}{200}\right)$?

7. גדי ואלי משחקים משחק. לפני המשחק בוחרים $k\geq 2$, וצובעים נקודה במישור באדום. בכל צעד, גדי צובע נקודה נוספת במישור באדום. מיד לאחר מכן, אלי מחבר אותה בקטע ישר לאחת מהנקודות שכבר צבועות. הם צריכים לשחק לפי הכללים הבאים:

(1) אסור ששלוש נקודות אדומות יהיו על ישר.
(2) אסור שהקטעים שאלי חיבר יחתכו זה את זה.
(3) אסור שנקודה אדומה תהיה מחוברת ביותר מ- k קטעים.

אם אלי לא מצליח לשחק הוא מושמד. לכל אחד מהמקרים הבאים, קבע האם גדי יכול להשמיד את אלי. במקרה שכן, מה הכמות המינימלית של מהלכים שהוא צריך לשם כך.

א. *(2 נקודות)* $k=2$.

ב. *(8 נקודות)* $k=3$.

בהצלחה!

28/3/2018 **מחנה פסח** י"ב בניסן תשע"ח

קבוצת רותם

1. יהי $p \geq 2$ ראשוני. הרמן ואלברט משחקים במשחק הבא: כל אחד מהם בתורו בוחר מספר i כלשהו מהקבוצה $\{0,1,\ldots,p-1\}$, שלא נבחר קודם לכן על ידי אף אחד מהשחקנים, ואז בוחר איבר a_i מהקבוצה $\{0,1,\ldots,9\}$. הרמן מתחיל, והמשחק נגמר כאשר כל האיברים מהקבוצה $\{0,1,\ldots,p-1\}$ נבחרו. בתום המשחק, מחושב המספר

$$M = a_0 + 10 \cdot a_1 + \ldots + 10^{p-1} \cdot a_{p-1} = \sum_{i=0}^{p-1} 10^i \cdot a_i$$

המטרה של הרמן היא ש- M יתחלק ב- p, והמטרה של אלברט היא למנוע זאת. הוכיחו שלהרמן יש אסטרטגיה מנצחת במשחק.

2. במשולש ABC, המעגל החסום מבחוץ הנמצא מול A הוא ω. הנקודות D,E,F הן נקודות ההשקה של ω עם הישרים BC,CA,AB בהתאמה. המעגל החוסם של המשולש AEF חותך את הישר BC בנקודות P,Q. הנקודה M היא אמצע הקטע AD. הוכיחו כי המעגל החוסם של המשולש MPQ משיק ל- ω.

3. עבור קבוצה סופית X של שלמים חיוביים, נסמן ב- $f_X(k)$ את השלם החיובי ה- k בגודלו שאינו נמצא ב- X. כמו כן, עבור קבוצות סופיות X,Y של שלמים חיוביים, נגדיר

$$X * Y = X \cup \{f_X(y) : y \in Y\}$$

נתונות קבוצות A,B של שלמים חיוביים, כאשר A מכילה $a>0$ איברים, ו- B מכילה $b>0$ איברים. נניח שמתקיים $A*B=B*A$. הוכיחו כי

$$\underbrace{A*\left(A*\cdots*\left(A*\left(A*A\right)\right)\cdots\right)}_{\text{פעמים } b \text{ מופיע } A} = \underbrace{B*\left(B*\cdots*\left(B*\left(B*B\right)\right)\cdots\right)}_{\text{פעמים } a \text{ מופיע } B}$$

בהצלחה!