תרגיל קומבינטורי

1. יהי n מספר טבעי. מצאו את המספר הקטן ביותר k בעל התכונה הבאה: לכל קבוצה סופית של ממשיים בקטע $[0,1]$ שסכומם n, ניתן לחלק את הקבוצה ל-k תתי קבוצות (אולי ריקות) כך שסכום האיברים בכל תת קבוצה לא עולה על 1.

2. אנה ובננה משחקות משחק על לוח $2 \times n$, כאשר n אי זוגי. אנה ראשונה ובהתחלה הלוח ריק. כל שחקנית בתורה, בוחרת משבצת ריקה וצובעת אותה בכחול או באדום לבחירתה. כאשר כל המשבצות צבועות, סופרים את הזוגות של משבצות סמוכות (לפי צלע) באותו צבע ומשבצות סמוכות בצבעים שונים. אם יש יותר זוגות של משבצות סמוכות באותו צבע, אנה מנצחת. אם יש יותר זוגות של משבצות סמוכות בצבעים שונים, בננה מנצחת. בכל מקרה אחר יש תיקו. למי יש אסטרטגיה מנצחת?

3. יהי $n \geq 4$ מספר טבעי. נתון לוח $n \times n$ שבו יש פלוסים על האלכסון, ובשאר המשבצות רשום מינוס. מותר לבצע פעולות מהסוג הבא: בוחרים שורה או עמודה ומשנים בה את כל סימני המשבצות. הראו כי לאחר כל מספר סופי של פעולות על הלוח הנ"ל, יהיו בו לפחות n פלוסים.

4. 2N רדיוסים מחלקים את המעגל לגזרות שוות: N כחולות ו-N אדומות. בגזרות הכחולות, החל מגזרה מסוימת, רושמים מספרים מ-1 עד N נגד כיוון השעון. בגזרות האדומות, החל מגזרה מסוימת, רושמים את אותם המספרים אבל עם כיוון השעון. הוכיחו שיש חצי עיגול, שבו רשומים כל המספרים מ-1 עד N.

5. על גרף סופי מותרת הפעולה הבאה: בוחרים מעגל באורך 4 (אם קיים) ומוחקים ממנו צלע. עבור מספר שלם $n \geq 4$, מצאו את המספר הקטן ביותר של צלעות בגרף, שיכול להתקבל מביצוע חוזר של הפעולה הזו על הגרף המלא בעל n קודקודים.

6. נתונה קבוצה של $2n-1$ ממשיים חיוביים שסכומם S. הוכיחו כי יש לפחות $\binom{2n-2}{n-1}$ תתי קבוצות בגודל n שסכום איבריהן לפחות $\frac{S}{2}$.

7. נתונות תתי קבוצות $F_1, F_2, \dots, F_m$ של $\{1,2,\dots,n\}$, כך שלכל $1 \leq i < j \leq m$ מתקיים $\min(|F_i \setminus F_j|, |F_j \setminus F_i|) = 1$. הוכיחו כי $m \leq n$.

8. הרמן מתחיל עם n כרטיסים הממוספרים ב-$1,2,\dots,n$ ומסדר אותם בשורה בסדר כלשהו. זוג (a,b) ייקרא *הפרת סדר* אם $a > b$ והכרטיס שממוספר ב-a נמצא משמאל לכרטיס שממוספר ב-b.
הוא מבצע n שלבים באופן הבא: לכל $1 \leq i \leq n$, בשלב ה-i, אם לכרטיס הממוספר ב-i יש k כרטיסים משמאלו, הוא יזיז את הכרטיס כך שהפעם יהיו לו k כרטיסים מימינו (דוגמה עבור $n=4$: $3,1,4,2 \to 3,4,1,2 \to 2,3,4,1 \to 2,4,3,1 \to 2,3,4,1$).
הוכיחו כי לא משנה כיצד הרמן יסדר בהתחלה את הכרטיסים, לסידור הסופי יהיה אותו מספר הפרות סדר כמו לסידור ההתחלתי.

9. נתונים מספרים טבעיים שונים $a_1, a_2, \dots, a_n$ ותהי M קבוצה של $n-1$ מספרים טבעיים שלא מכילה את $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. צפרדע רוצה לבצע קפיצות על הציר הממשי, כאשר היא מתחילה בנקודה 0 ומבצעת n קפיצות ימינה באורכים $a_1, a_2, \dots, a_n$ בסדר כלשהו. הוכיחו כי הצפרדע יכולה לבחור את סדר הקפיצות כך שהיא לא תדרוך על אף נקודה ב-M.

בתאבון!