תרגיל בנושא חזקת נקודה

שאלות

0. (IMO Shortlist 2008, G1) ABC משולש חד זויות, H נקודת מפגש הגבהים, A0, B0, C0 אמצעי הצלעות BC,CA,AB בהתאמה. המעגלים דרך H עם מרכזים ב A0,B0,C0 חותכים את BC, CA, AB בנקודות A1,A2,B1,B2,C1,C2 בהתאמה. הראה שהנקודות A1,A2,B1,B2,C1,C2 על מעגל אחד.

1. (IMO 2004, Q1) ABC משולש כך ש $AB \neq AC$. המעגל שקוטרו BC חותך את הצלעות AB ו AC בנקודות M ו N בהתאמה. נסמן ב O את אמצע BC. חוצי הזוויות של BAC, MON נחתכים ב-R. הוכח כי למעגלים BMR, CNR יש נקודת חיתוך על BC.

2. (IMO Shortlist 2008, G2) ABCD טרפז עם $AB \parallel CD$. נניח שקיימות נקודות E על הקו BC מחוץ לקטע BC, וF בתוך הקטע AD, כך שהזוויות CBF, DAE שוות. נקודות I, J הם חיתוכים של EF עם AB, CD בהתאמה. K היא האמצע של EF. נניח ש K לא נמצאת על הקו AB. הוכח כי המרובע KAIB חסום אם ורק אם המרובע CDJK חסום.

3. (IMO Shortlist 2006, G5) ABC משולש, J מרכז המעגל החסום מבחוץ לצלע BC, נקודות השקה של המעגל עם BC והמשכי AB, AC הם A_1, C_1, B_1 בהתאמה. הישר A_1B_1 פוגש את הצלע AB בנקודה D בזווית ישרה. במשולש JDC_1 מעבירים גובה C_1E. חשב את הזוויות AEB_1, BEA_1.

4. (IMO Shortlist 2007, G7) במשולש ABC כל הזוויות חדות, $\beta > \gamma$. AD הוא גובה, ונקודה K נמצאת על המשך של AD מעבר ל-D, כך שאורך AK שווה לקוטר של המעגל החוסם. I הוא מרכז המעגל החסום ב-ABC. KI חותך את BC ב-F, DI חותך את AC ב-E.

הוכח כי אם IE = IF אז $\beta \leq 3\gamma$.

רמזים והערות

0.

א. רמזים – קווי המרכזים הם קווי אמצעים לכן מאונכים לגבהים, ונקודת החתיוך הנוספת של כל שני מעגלים היא על הגובה. עכשיו מקבלים שכל ארבע ציקליות ומשיקול של צירים רדיקליים סיימנו.

ב. אפשר להראות יותר מזה – O היא מרכז המעגל.

ג. אפשר לפתור בעוד הרבה דרכים – וקטורים, גיאומטריה אנליטית, טריגו, מרוכבים.

1.

א. רמזים – A על הציר הרדיקלי, לכן נקודת החיתוך הנוספת נמצאת על AR. נותר להראות ש AMRN ציקלי – נובע מכך שOR אנך אמצעי ל MN, בעצם R אפילו מרכז המעגל החסום ב MON.

ב. צריך לשים לב – חשוב להוכיח שהנקודה היא בקטע BC (ולא רק על הקו), צריך לחשוב על המקרה התיאורטי בו המעגלים רק משיקים, צריך לחשוב על מיקום של נקודות.

2.

א. רמזים - AEBF ציקלי, CDFE ציקלי. בטא את המשוואות המתקבלות כתלות ב FJ, FI ו FE.

ב. צריך לשים לב - E יכולה להיות משני צדי BC, מיקום K על EF ביחס לנקודות I,J יכול להשתנות.

ג. אפשר לפתור גם עם הטלה פרויקטיבית.

3.

א. רמזים – להסתכל על החזקה של J ביחס למעגלים עם קטרים C_1D, A_1B, AB_1. התשובה – 90 מעלות (כי E על שלושת המעגלים).

ב. אפשר גם לפתור מתוך האבחנות ש C, E, C_1 על ישר אחד, והמרובעים BEA_1D ו $ADEB_1$ ציקליים. לחילופין, אפשר לשים לב ש$AC=AB$, ו ABC דומה ל B1A1J. הדמיון מורכב מסיבוב של 90 מעלות והומותטיה מאותה נקודה. בנוסף, JA1BC1 ציקלי ולכן A1C1 חוצה זווית DA1J. נובע ש C1 מרכז המעגל החסום מחוץ למשולש B1A1J ביחס לצלע A1J. מכאן נסיק שמרכז ההומתטיה היא E וסיימנו.

ג. ניתן לפתור גם עם גיאומטריה אנליטית (אין דרגות חופש).

.4

א. רמזים – הוכח כי KID=$\frac{\beta-\gamma}{2}$. בניות מרכזיות – P – הנקודה ההפוכה ל A על המעגל החוסם, M – נקודת החיתוך של AI עם המעגל החוסם. AM אנך אמצעי ל KP. J מרכז המעגל החסום מחוץ לBC. BCIJ על מעגל שמרכזו M. 'B שיקוף של B ביחס ל AM – גם על המעגל. כעת KDB'C ציקלי, 'IJCB ציקלי וחזקה של A נותנת לנו ציקליות של IDKJ. N הנקודה ההפוכה ל K על מעגל זה. N על BC, KM אנך אמצעי ל IJ, לכן עובר דרך N.

ב. אפשר לפתור גם עם ציקליות ודמיון משולשים על ידי בניית אנכים מ I לצלעות ול AD.

ג. הסיום מתחלק ל CEIF דלתון (ואז אי שוויון חד) או ציקלי (ואז שוויון). אם הוא דלתון, אפשר להוכיח בלי הנ"ל.

ד. אפשר גם להשתמש בנוסחה לאורך AI, זה נותן דמיון משולשים כנ"ל.

במידה ונותר זמן, שאלות נוספות רלבנטיות:

5. (IMO Shortlist 2009, G2) ABC משולש עם מרכז מעגל חוסם O. הנקודות P,Q הן נקודות פנימיות של הצלעות AC,AB בהתאמה. המעגל k עובר שרך אמצעי הקטעים BP, CQ ו PQ. הוכח שאם PQ משיק למעגל k, אז OQ=OP.

6. ABCD טרפז עם צלעות מקבילות AB>CD. הנקודות K ו L נמצאות על הקטעים AB ו CD בהתאמה כך ש AK/KB=DL/LC. נניח שיש נקודות P,Q על הקטע KL שמקיימות APB=BCD ו CQD=ABC. הוכח ש PQBC ציקלי.

7. הנקודה P נמצאת בתוך משולש ABC. הקווים AP, BP, CP חותכים את המעגל החוסם של ABC שוב בנקודות M,L,K בהתאמה. המשיק למעגל החוסם ב C חותך את הקו AB ב S. הוכח כי SP=SC אם ורק אם ML=MK.

8. ABCD מרובע קמור. P ו Q נקודות ב ABCD כך ש PQDA ו QPBC מרובעים ציקליים. נניח שיש נקודה E על הקטע PQ כך ש QDE=PAE ו QCE=PBE. הוכח שABCD ציקלי.

9. במשולש חד זויות ABC, מורידים גבהים BE ו CF. שני מעגלים שעוברים דרך הנקודות A ו F משיקים לישר BC בנקודות P ו Q כך ש B נמצאת בין C ל Q. הוכח שהישרים PE ו QF נחתכים על המעגל החוסם של AEF.