# חל וקו ת

**סימונים:**

- $p(n)$ מספר הדרכים לייצג את $n$ כסכום של מספרים שלמים חיוביים.

(נגדיר $p(0) = 1$ ולכל $z$ שלילי $p(z) = 0$)

- $p_k(n)$ מספר הדרכים לייצג את $n$ כסכום של $k$ מספרים שלמים חיוביים.

(אם $k > n$ אז נאמר כי $p_k(n) = 0$)

- $p'(n)\ ,\ p'_k$ כמו הקודמים רק שהמספרים חייבים להיות שונים הפעם.

<u>**הערה:**</u> בכל ההגדרות הנ"ל אין חשיבות לסדר המחוברים.

1. הוכיחו שכאשר $n > k$
$$p_k(n) = p_1(n-k) + p_2(n-k) + \cdots + p_k(n-k)$$
2. הוכיחו כי מספר החלוקות של$n$ עם לכל היותר ל-$k$ מחוברים שווה למספר החלוקות של $n$ למחוברים שגודלם לכל היותר $k$.
3. נאמר כי חלוקה של $n$ היא מדהימה אם כאשר רושמים את המחוברים בתור $y_1 \le y_2 \le \cdots \le y_t$ אז לכל $1 \le r \le t$ כמות המספרים שגדולים או שווים ל $r$ (מבין $(y_1, y_2, \dots y_t$ היא $y_{t+1-r}$. למשל $5 = 1 + 1 + 3$ זאת חלוקה מדהימה. הוכיחו כי כמות החלוקות המדהימות של $n$ שווה למספר הדרכים להציג את $n$ כסכום של מספרים אי זוגיים שונים.
4. $np(n) = \sum_{r\ge1} r \sum_{k\ge1} p(n-kr)$
5. משפט אויילר: הוכיחו כי $p'(n)$ שווה גם לכמות הדרכים להציג את $n$ כסכום של מספרים אי זוגיים (לא בהכרח שונים)
6. $$\binom{n-1}{k-1} \le k!\,p_k(n) \le \binom{n+\binom{k}{2}-1}{k-1}$$
7. הוכיחו כי קיים מספר חיובי $c$ כך שמתקיים $p(n) \ge 2^{c\sqrt{n}}$
8. נסמן ב $d(n)$ את ההפרש בין כמות הדרכים להציג את $n$ כסכום של כמות זוגית של מספרים שונים לכמות הדרכים עם כמות אי זוגית של מספרים חיוביים שלמים.

   א) $\sum_{k=0}^{n} p(k)d(n-k) = 0$ (כאשר $p(0) = d(0) = 1$ )

   ב) $$d(\mathrm{n}) = \begin{cases} (-1)^b & n = \frac{b(3b-1)}{2} \ or\ \frac{b(3b+1)}{2} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$
9. לכל חלוקה של $n$ נתבונן בכמות האחדים בה וכמות המספרים השונים בה. למשל עבור $3 + 2 + 1 + 1 = 7$ כמות האחדים היא 2 וכמות המספרים השונים היא 3. הוכיחו כי לסכום על פני כלל החלוקות את כמויות האחדים או את כמויות המספרים השונים יביא לאותה התוצאה.