Hölder

אי-שיוויון הולדר:

לכל $a_i \geq 0, b_i \geq 0, \alpha > 0, \beta > 0$ *מתקיים*

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^\alpha (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^\beta \geq \left((a_1^\alpha b_1^\beta)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + \cdots + (a_n^\alpha b_n^\beta)^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \right)^{\alpha+\beta}$$

דוגמאות:

1. עבור כל a, b, c, d חיוביים הוכיחו כי

$$64(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) \geq (a + b + c + d)^4$$

2. עבור כל a, b, c, d חיוביים הוכיחו כי

$$\sqrt[5]{\frac{a^5 + b^5 + c^5 + d^5}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{a^3 + b^3 + c^3 + d^3}{4}}$$

3. עבור כל $x,\ y,\ z$ חיוביים הוכיחו כי

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} \geq 2$$

4. מסקנה\הכללה של הולדר: לכל $a_{ij} \geq 0, \alpha_i > 0$ מתקיים

$$\prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right)^{\alpha_i} \geq \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{k} a_{ij}^{\alpha_i} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k}} \right)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k}$$

5. לכל a, b, c חיוביים:

$$(a^2 + ab + b^2)(a^2 + ac + c^2)(b^2 + bc + c^2) \geq (ab + ac + bc)^3$$

אתגרים

1. לכל a, b, c חיוביים הוכיחו כי

$$3(a^3+b^3+c^3)(a+b+c) \geq (a^2+b^2+c^2)^3$$

2. לכל x, y, a, b חיוביים, כך ש- $a^5+b^5 \leq 1, x^5+y^5 \leq 1$ הוכיחו כי:

$$a^2x^3+b^2y^3 \leq 1$$

3. לכל a, b, c חיוביים כך ש- $a+b+c=1$
הוכיחו כי:

$$\sqrt[3]{a^4+2b^2c^2}+\sqrt[3]{b^4+2a^2c^2}+\sqrt[3]{c^4+2a^2b^2} \geq 1$$

4. לכל x, y, z חיוביים הוכיחו כי

$$\frac{x}{\sqrt{yz+4xy+4xz}}+\frac{y}{\sqrt{xz+4xy+4yz}}+\frac{z}{\sqrt{xy+4xz+4yz}} \geq 1$$

5. * לכל a, b, c, d חיוביים, הוכיחו כי

$$\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{cd} \leq \sqrt[3]{(a+c+b)(a+c+d)}$$