דף בעיות בתורת החבורות

1. קיראו בויקיפדיה על המונכים: חבורה, תת־חבורה, חבורה קמוטטיבית/אבלית תת־חבורה נורמלית, חבורת מנה, חבורה פשוטה, וייצוג של חבורה (אם אתם לא מכירים אותם)

2. (א) בהינתן חבורה G הוכיחו שקיימת סידרה $\{1\} = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_{n-1} \subset G_n = G$ כך שלכל i החבורה G_i נורמלית ב G_{i+1} והמנה G_{i+1}/G_i פשוטה (זאת אומרת שיש לה בידיוק 2 תת חבורות נורמליות)

   (ב) (*) הוכיחו שהקבוצה (כולל ריבוי) של המנות G_{i+1}/G_i (עד כדי איזומורפיזם) לא תלויה בבחיתר הסידרה G_i אלה רק בנחבורה G. טענה זאת נקראת משפט ז'ורן־הלדר. המנות G_{i+1}/G_i נקראות רכיבי ז'ורן־הלדר של G.

3. (א) תארו את מחלקות הצמידות בחבורה S_n. הערה: שני עיברים x, y בחבורה G נקראים צמודים אם קיים $g \in G$ כך ש: $gxg^{-1} = y$. מחלקת צמידות הויא מחלקת שקילות תחת יחס הצמידות (שהוא יחס שקילות).

   (ב) קיראו בויקיפדיה על מושג המחפלה החצי ישרה (אם אתם לא מכירים אותו)

   (ג) עבור כל עיבר ב S_n תארו את המרכז שלו. זאת אומרת את החבורה של העיברים שמתחלפים איתו

   (ד) תארו את פירוק ז'ורדן־הולדר של מרכז זה.

4. מצאו את כל ההומומורפיזמים מהחבורה S_n (חבורת התמורות על n עיברים) לחבורה קמוטטיבית A כלשהיא

5. (*) תארו את תתי החבורות הנורמליות ב S_n

6. קיראו בויקיפדיה על המונכים: שדה, מציין של שדה, מרחב ליניארי/מרחב וקטורי, וקטורים בילתי תלויים ליניארית, וקטורים פורסים, בסיס, אופרטור לינויארי, מטריצה, כפל מטריצות ומרכב מנה. (אם אתם לא מכירים אותם)

7. עבור שדה F עם מציין שונה מ־2 תארו את כל ההומומורפיזמים מהחבורה $GL_n(F)$ (חבורת המטריצות ההפיכות $n \times n$) לחבורה קמוטטיבית A כלשהיא

8. מצאו תנאי הכרחי ומספיק על פולינום p במשתנה אחד מעל שדה F כדי שהמנה של החוג $F[x]$ של הפולינומים מעל F במרחב $pF[x]$ (המרחב שמורכב מכל הפולינומים המתחלקים ב p) תהיה שדה

9. הכיחו שאם p הוא פולינום במשתנה אחד מעל שדה F אז קיים ויחיד (עד כדי איזומורפיזם) שדה L המכיל את F שבו p מתפצל לגורמים ליניאריים כך ש L הוא מינימלי עם תחונה זאת

10. הוככיחו שאם p זר ל p' אז ל p אין שורשים כפולים בשום שדה שמכיל את F. סימו לב שהניגזרת במיקרה זה מוגדרת על ידי נוסחה לניגזרת של פולינום

11. תארו את כל השדות הסופיים (עד כדי איזומורפיזם)

12. קיראו בויקיפדיה על המונכים: וקטור עצמי, ערך עצמי, ליחסון, וצורת ז'ורדן(*). (אם אתם לא מכירים אותם)

13. (א) תארו את מחלקות הצמידות בחבורה $GL_2(\mathbb{F}_p)$

(ב) עבור כל עיבר ב $GL_2(\mathbb{F}_p)$ תארו את המרכז שלו

14. (*) תארו את כל תתי־החבורות הנורמליות של $GL_2(\mathbb{F}_p)$

15. (ליודעי אלגברה לינארית)

(א) תארו את מחלקות הצמידות בחבורה $GL_n(\mathbb{F}_p)$

(ב) עבור כל עיבר ב $GL_n(\mathbb{F}_p)$ תארו את רכיבי ז'ורדן־הולדר המרכז שלו

16. (**) תארו את החבורה הנוצרת על ידי היוצרים $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ תחת היחסים

(א) $(\sigma_i \sigma_{i+1})^3 = 1$

(ב) $(\sigma_i \sigma_j)^2 = 1$, כאשר $|i-j| > 1$.

זאת אומרת החבורה של כל הביטויים (בעלי המשמעות) שאפשר לכתוב עם האותיות $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ וסימני הכפל, ההיפוך והיחידה כאשר אנו מזהים את הביטויים בסעיפים א. וב. עם היחידה, ומזהים את כל הביטוים שאנחנו צריכים לזהות בשביל שאקסיאומת החבורה יתקמו.

17. קיראו בויקיפדיה על המושגים תבנית בי־לינארית, תבנית בי־לינארית סימטרית, תבנית ריבועית, תבנית בי־לינארית, אנטי סימטרית, תבנות בי־לינארית לא מנוונת.

18. (*) בהינתן גרף Γ בעל n קודוקודים, קבעו מתי אפשר למצא וקטורים במרחב $\mathbb{R}^n$ כך שכל קודקוד ב Γ יתאים לווקטור באורך 1, הזווית בין שני וקטורים המתאימים לקודקודים שכנים תהיה 120 מעלות, והזווית בין שני וקטורים המתאימים לקודקודים שאינם שכנים תהיה 90 מעלות