

גרפים

1. הדרגה המקסימלית בגרף G היא d , הוכיחו כי ניתן לצבוע את קודקודיו ב- $d + 1$ צבעים כך שכך שני קודקודים שכנים יהיו בצבעים שונים.
2. הוכיחו שאם בגרף אין מעגל אי-זוגי אזי ניתן לצבוע את קודקודיו בשני צבעים.
3. רוצים לצייר במישור גרף מלא עם n קודקודים, כך שכל קשת נחתכת פעם אחת לכל היותר. מהו הערך הגדול ביותר האפשרי של n ?
4. נתון גרף שבו לכל שני מעגלים אי-זוגיים יש קודקוד משותף. הוכיחו כי ניתן לצבוע את הגרף ב-5 צבעים.
5. ידוע שכל הדרגות בגרף הן לפחות k . הוכיחו כי קיים מעגל באורך לפחות $k + 1$.
6. ידוע שכל הדרגות בגרף הן לפחות 3. הוכיחו כי קיים מעגל באורך שלא מתחלק ב-3.
7. א. ידוע שכל קודקוד בגרף שייך למעגל אי-זוגי אחד לכל היותר. הוכיחו כי ניתן לצבוע את הגרף ב-3 צבעים.
ב. הוכיחו שאם כל קודקוד שייך לכלל היותר N מעגלים אי זוגיים. הוכיחו כי ניתן לצבוע את הגרף ב- $2N + 2$ צבעים.
8. נתון גרף בעל קוטר d שהמעגל המינימלי בו מאורך $2d + 1$. הוכיחו כי כל הדרגות בגרף שוות.
9. משפט הול. נתון גרף דו-צדדי שבצד שמאל יש X קודקודים ובצד ימין $Y \geq X$ קודקודים. הוכיחו כי ניתן למצוא זיווג על הקודקודים של X אם ורק אם לכל תת קבוצה של קודקודים משמאל, כמות החברים שלה היא לפחות הגודל שלה.
10. משפט אוילר. א. הוכיחו כי בכל גרף קשיר שכל הדרגות בו זוגיות קיים מעגל שעובר בכל צלע פעם אחת בדיוק.
ב. הוכיחו כי בכל גרף קשיר שכל הדרגות בו זוגיות מלבד לאולי שני קודקודים, קיים מסלול שעובר בכל צלע פעם אחת בדיוק.
11. יהי גרף קשיר G שבו כל קשת צבועה באדום או כחול, ידוע שבכל קודקוד כמות הקשתות הכחולות שווה לכמות הקשתות האדומות. הוכיחו כי בין כל שני קודקודים u, v קיים מסלול שכל שתי קשתות סמוכות בו צבועות בצבעים שונים.

בתאבון!