

גרפים

- ישנה שכונה עם אנשים, בה יש סה"כ 100 זוגות של חברים. כל מהלך ראש העיר מחליט שמישהו צריך לעבור דירה, ואז הוא מסתכסך עם כל מי שהוא הכיר, ונהיה חבר של כל מי שהוא לא הכיר. הוכיחו שב-10 מהלכים לכל היותר ראש העיר יכול לפצל את העיר לשני מחנות לפחות (אנשים בין מחנות שונים לא מכירים זה את זה).
- נתון גרף מישורי פשוט לא מכוון. הוכיחו שאפשר לכוון את הקשתות, כך שמכל קודקוד יצאו לכל היותר 3 קשתות.
- נתון גרף מכוון עם n קודקודים שבו כל קשת צבועה באחד משני צבעים B, R . ידוע כי לכל מילה המורכבת מהאותיות B, R באורך 2^n לכל היותר, יש מסלול בגרף כאשר הקשתות במסלול הן לפי המילה. לדוגמה אם המילה היא BR אז יש 3 קודקודים כאשר יש קשת מהראשון לשני צבועה ב- B והקשת מהשני לשלישי צבועה ב- R . הוכיחו כי זה מתקיים למילה באורך כלשהו.
- יש מדינה ובה בין כל שתי ערים יש או רכבת או קו אוטובוס אבל רק בכיוון אחד. הוכיחו שקיימת עיר מקושרת C עבורה לכל עיר אחרת T קיים סוג תחבורה שאפשר להשתמש רק בו כדי להגיע מ- C ל- T .
- נתון גרף שהדרגה בו חסומה על ידי $1 + n + m$. הוכח כי אפשר לחלק את הקודקודים שלו לשתי תתי קבוצות, כך שאם מוחקים את כל הקשתות שמחברות בין שתי הקבוצות, הדרגה בקבוצה אחת חסומה על ידי m ובשנייה על ידי n .
- נתון עץ. בכל קודקוד יושב אדם וסופר את כל הדרכים למספר את הקודקודים של העץ מ-1 עד v כך שכל מסלול שמתחיל בקודקוד הזה יהיה בסדר עולה. לכולם חוץ מלאדם אחד יצאה תשובה שמתחלקת ב-2018. הוכיחו שגם לאדם האחרון התשובה תתחלק ב-2018.
- יש 2017 אנשים, שני אנשים יכולים לדבר אחד עם השני בעברית או באנגלית, חלק מהאנשים דיברו אחד עם השני לכל היותר פעם אחת. ידוע שבין כל 4 אנשים מספר זוגי של זוגות דיברו אחד עם השני, לפחות זוג אחד דיבר בעברית, ואם יש זוג דובר אנגלית אז כמות הזוגות דוברי אנגלית היא לפחות כמות הזוגות שדיברו עברית. הוכח כי יש 673 אנשים שכל שניים מהם דיברו עברית אחד עם השני.
- נתון גרף עם מסלול פשוט המורכב מלפחות L קשתות. בנוסף נתון שלכל שלושה קודקודים a, b, c קיים מסלול בין a ל- b שלא עובר ב- c . הוכיחו כי קיים מעגל פשוט באורך לפחות $\sqrt{2L}$.
- יש גרף עם 2017 קשתות ורוצים שהסכום $\sum_{e=vw} \min(d(v), d(w))$ על פני כל הקשתות יהיה מקסימלי. מה הכי טוב שאפשר?

בתאבון!