

אי-שוויונים גיאומטריים

במשולש תמיד p יסמן חצי-היקף, r רדיוס המעגל החסום, R רדיוס המעגל החוסם, a, b, c צלעות, α, β, γ זוויות ממול m_a תיכון לצלע a , h_a גובה לצלע a .

1. בכל משולש $R \geq 2r$.

2. נקודה M נמצאת בתוך משולש משוכלל ABC . באיזה תחום נמצא $\angle MAB + \angle MBC + \angle MCA$?

3. שטיינר-למוס: מול צלע גדולה יותר חוצה זווית קטן יותר.

4. הוכיחו אי-שוויון עבור אורך התיכון במשולש: $m_a \geq \frac{b+c}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$.

5. מהו השטח המרבי של מחומש, שיש לו צלע באורך $\sqrt{3}$ וכל הצלעות האחרות הן באורך 1?

6. $ABCD$ מרובע קמור, N אמצע BC , $\angle AND = 135^\circ$. הוכיחו כי

$$AB + \frac{BC}{\sqrt{2}} + CD \geq AD$$

7. הוכיחו כי $\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}$ לכל $a, b, c \in \mathbb{R}$.

8. מצולע קמור $A_1 A_2 A_3 \dots A_n$ ששטחו S חסום במעגל שרדיוסו R . נקודה B_i נמצאת על הצלע $A_i A_{i+1}$ (ונקודה B_n על $A_n A_1$). נסמן ב- P את ההיקפו של $B_1 B_2 B_3 \dots B_n$. הוכיחו כי $RP \geq 2S$.

9. הוכיחו כי במשולש $a \sin \frac{\alpha}{2} + b \sin \frac{\beta}{2} + c \sin \frac{\gamma}{2} \geq p$.

10. א. מצא את מספר K הקטן ביותר עבורו לכל a, b ממשיים מתקיים אי-שוויון

$$|(a^2 - b^2)ab| \leq K(a^2 + b^2)^2$$

ב. מצא את מספר M הקטן ביותר עבורו לכל $a, b, c \in \mathbb{R}$ מתקיים אי-שוויון

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

11. מספרים $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$ מקיימים $(a+b+c)(x+y+z) = 3$ ובנוסף

$$ax + by + cz \geq 0. (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 4$$

12. נתונים מספרים ממשיים x_1, x_2, \dots, x_n . הוכיחו כי

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \frac{x_3}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_1^2+\dots+x_n^2} < \sqrt{n}$$

13. (סגנון ארדש-מורדל) במשולש R_A, R_B, R_C מרחקים מנקודה אקראית P לקודקודים

A, B, C , המרחקים מאותה הנקודה לצלעות הם d_a, d_b, d_c , והרדיוסים של מעגלים

שחוסמים את המשולשים PBC, PAC, PAB הם ρ_a, ρ_b, ρ_c . הוכיחו כי:

$$\mathbf{א.} \quad 2(d_a + d_b + d_c) \leq R_A + R_B + R_C \quad \mathbf{ב.} \quad 8d_a d_b d_c \leq R_A R_B R_C$$

$$\mathbf{ג.} \quad \frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} \geq 2 \left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} \right) \quad \mathbf{ד.} \quad R_A + R_B + R_C \leq \rho_a + \rho_b + \rho_c$$

$$\mathbf{ה.} \quad \frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} \geq \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c}$$

14. נתון משושה קמור $ABCDEF$ בו צלעות מנוגדות מקבילות והיקפו $2p$. רדיוסים

המעגלים החסומים של FAB, BCD, DEF יסומנו R_A, R_C, R_E .

הוכיחו כי $R_A + R_C + R_E \geq p$.

15. לכל $k \in [-2, 2]$, ולכל $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$(a+c)(b+d) \leq \sqrt{a^2 + kab + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + kcd + d^2} + \sqrt{a^2 - kad + d^2} \cdot \sqrt{b^2 - kbc + c^2}$$

16. א. מצולע $ABCDE$ משוכלל, X נקודה. הראו כי $AX + CX + EX \geq BX + DX$.

ב. הוכיחו טענה דומה למצולע משוכלל $ABCDEFG$.

$$\mathbf{17.} \quad \frac{m_a}{h_a} \leq \frac{R}{2r} \quad \text{הוכח כי בכל משולש}$$

$$\mathbf{18.} \quad R_A + R_B + R_C \geq \frac{2(am_a + bm_b + cm_c)}{a+b+c} \quad \text{בסימוני ארדש-מורדל: הוכיחו כי}$$

$$\mathbf{19.} \quad \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \sin \alpha + \sin \beta \quad \text{במשולש חד-זווית:}$$

$$\mathbf{20.} \quad \sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \geq \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \quad \text{בכל משולש:}$$

21. הוכיחו כי במשולש חד-זווית $8R^2 < a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$. האם זה ממשיך להתקיים במשולש כללי.

22. במשולש רדיוס המעגל החוסם הוא R , מרכזו O ומפגש הגבהים H . מהו הערך

$$\frac{OH}{R} \quad \text{המקסימלי האפשרי עבור}$$

$$\mathbf{23.} \quad a + b + c \geq 4R + 2r \quad \text{במשולש חד-זווית}$$

24. (Pedoe) עבור שני משולשים ששטחיהם S_1, S_2 וצלעותיהם a_i, b_i, c_i הוכיחו כי

$$a_1^2(b_2^2 + c_2^2 - a_2^2) + b_1^2(a_2^2 + c_2^2 - b_2^2) + c_1^2(a_2^2 + b_2^2 - c_2^2) \geq 16S_1S_2$$