גישה גיאומטרית לאי-שוויונים

1. הטלה אורטוגונלית מקצרת (מסקנה: קושי-שוורץ).

2. אי-שוויון המשולש.

3. הצבת Ravi: רושמים הכל ב- x, y, z. נוסחאות חשובות: ל-Ravi:

$$S = \sqrt{pxyz} = pr = xr_a = \frac{abc}{4R}\ ,\ p = x + y + z,$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{px}{bc}}\ ,\ \cos\alpha = \frac{px - yz}{px + yz}.$$

4. במשולש מול צלע גדולה יותר נמצאת זווית גדולה יותר.

5. חוצה הזווית נמצא בין הגובה לתיכון.

6. מכפלת אלכסונים גדול מפעמיים שטח המרובע.

7. אי-שוויון תלמי: $ef \le ac + bd$.

8. אם p_1, p_2, p_3, p_4 הם מכפלות הצלעות בפאות הארבעון, אז $p_1 + p_2 + p_3 \ge p_4$.

9. אי-שוויון הרון: $a^4 + b^4 + c^4 < 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2$.

10. אי-שוויון איזופרמטרי.

<u>אי-שוויונים גיאומטריים</u>

במשולש תמיד p יסמן חצי-היקף, r רדיוס המעגל החסום, R רדיוס המעגל החוסם, a,b,c צלעות, α,β,γ זוויות ממול m_a תיכון לצלע a, h_a גובה לצלע a.

1. בכל משולש $R \ge 2r$.

2. נקודה M נמצאת בתוך משולש משוכלל ABC. באיזה תחום נמצא $\measuredangle MAB + \measuredangle MBC + \measuredangle MCA$?

3. שטיינר-למוס: מול צלע גדולה יותר חוצה זווית קטן יותר.

4. הוכיחו אי-שוויון עבור אורך התיכון במשולש: $m_a \ge \frac{b+c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$.

5. מהו השטח המרבי של מחומש, שיש לו צלע באורך $\sqrt{3}$ וכל הצלעות האחרות הן באורך 1?

6. ABCD מרובע קמור, N אמצע BC, $\measuredangle \mathrm{AND} = 135^\circ$. הוכיחו כי

$$AB + \frac{BC}{\sqrt{2}} + CD \ge AD.$$

7. הוכיחו כי $\sqrt{a^2-ab+b^2} + \sqrt{b^2-bc+c^2} \ge \sqrt{a^2+ac+c^2}$ לכל $a,b,c \in \mathbb{R}$.

8. מצולע קמור $A_1A_2A_3...A_n$ ששטחו S חסום במעגל שרדיוסו R. נקודה B_i נמצאת על הצלע A_iA_{i+1} (ונקודה B_n על A_nA_1). נסמן ב-P את ההיקפו של $B_1B_2B_3...B_n$.
הוכיחו כי $RP \ge 2S$.

9. הוכיחו כי במשולש $a\sin\frac{\alpha}{2} + b\sin\frac{\beta}{2} + c\sin\frac{\gamma}{2} \ge p$.

10. א. מצא את מספר K הקטן ביותר עבורו לכל a,b ממשיים מתקיים אי-שוויון

$$\left|\left(a^2-b^2\right)ab\right| \le K\left(a^2+b^2\right)^2.$$

ב. מצא את מספר M הקטן ביותר עבורו לכל $a,b,c \in \mathbb{R}$ מתקיים אי-שוויון

$$\left|ab\left(a^2-b^2\right) + bc\left(b^2-c^2\right) + ca\left(c^2-a^2\right)\right| \le M\left(a^2+b^2+c^2\right)^2.$$

11. מספרים $a,b,c,x,y,z \in \mathbb{R}$ מקיימים $(a+b+c)(x+y+z)=3$ ובנוסף $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=4$. הוכיחו כי $ax+by+cz \ge 0$.

12. נתונים מספרים ממשיים $x_1, x_2, ..., x_n$. הוכיחו כי

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \frac{x_3}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2} + ... + \frac{x_n}{1+x_1^2+...+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

13. (סגנון ארדש-מורדל) במשולש R_A, R_B, R_C מרחקים מנקודה אקראית P לקודקודים A, B, C, המרחקים מאותה הנקודה לצלעות הם d_a, d_b, d_c, והרדיוסים של מעגלים שחוסמים את המשולשים PBC, PAC, PAB הם ρ_a, ρ_b, ρ_c. הוכיחו כי:

א. $2\left(d_a + d_b + d_c\right) \le R_A + R_B + R_C$ **ב.** $8d_a d_b d_c \le R_A R_B R_C$

ג. $\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} \ge 2\left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}\right)$ **ד.** $R_A + R_B + R_C \le \rho_a + \rho_b + \rho_c$

ה. $\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} \ge \frac{1}{\rho_a} + \frac{1}{\rho_b} + \frac{1}{\rho_c}$.

14. נתון משושה קמור $ABCDEF$ בו צלעות מנוגדות מקבילות והיקפו $2p$. רדיוסים המעגלים החסומים של FAB, BCD, DEF יסומנו R_A, R_C, R_E.

הוכיחו כי $R_A + R_C + R_E \ge p$.

15. לכל $k \in \left[-2, 2\right]$, ולכל $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\left(a + c\right)\left(b + d\right) \le \sqrt{a^2 + kab + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + kcd + d^2} + \\ + \sqrt{a^2 - kad + d^2} \cdot \sqrt{b^2 - kbc + c^2}$$

16. **א.** מצולע ABCDE משוכלל, X נקודה. הראו כי $\mathrm{AX} + \mathrm{CX} + \mathrm{EX} \ge \mathrm{BX} + \mathrm{DX}$.

ב. הוכיחו טענה דומה למצולע משוכלל ABCDEFG.

17. הוכח כי בכל משולש $\frac{m_a}{h_a} \le \frac{R}{2r}$.

18. בסימוני ארדש-מורדל: הוכיחו כי $R_A + R_B + R_C \ge \frac{2\left(am_a + bm_b + cm_c\right)}{a + b + c}$.

19. במשולש חד-זווית: $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \sin\alpha + \sin\beta$.

20. בכל משולש: $\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \ge \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$.

21. הוכיחו כי במשולש חד-זווית $8R^2 < a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2$. האם זה ממשיך להתקיים במשולש כללי.

22. במשולש רדיוס המעגל החוסם הוא R, מרכזו O ומפגש הגבהים H. מהו הערך המקסימלי האפשרי עבור $\frac{\mathrm{OH}}{R}$?

23. במשולש חד-זווית $a + b + c \ge 4R + 2r$

24. (Pedoe) עבור שני משולשים ששטחיהם S_i וצלעותיהם a_i, b_i, c_i הוכיחו כי $a_1^2\left(b_2^2 + c_2^2 - a_2^2\right) + b_1^2\left(a_2^2 + c_2^2 - b_2^2\right) + c_1^2\left(a_2^2 + b_2^2 - c_2^2\right) \ge 16S_1S_2$.