

# אי שיויונים גיאומטרים

## אי שיויונים חשובים

אי שיויון המשולש- בכל משולש עם צלעות  $a, b, c$  מתקיים  $a + b \geq c$  לכל ישר ונקודה מחוץ לישר, הניצב קצר ממרחק מנקודה על הישר  
אי שיויון תלמי- לכל 4 נקודות  $A, B, C, D$  מתקיים ש  
 $|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| \geq |AC| \cdot |BD|$  והשיויון מתקיים אם הארבעה על מעגל בסדר הזה.

## תרגילים

1. הוכיחו שבכל מצולע כל צלע קטנה מסכום שאר הצלעות.
2. בהינתן מרובע קמור  $ABCD$  מצאו את הנקודה שמקיימת שסכום מרחקיה מהקודקודי המרובע מינימלי.
3. הוכיחו שבכל משולש כל חוצה זווית קטן מהתיכון המתאים לו
4. יהי משולש עם היקף  $P$ , מה השטח המקסימלי שלו?
5. יהי מצולע קמור  $\alpha$  שמוכל במצולע קמור  $\beta$ . הוכיחו כי היקף  $\alpha$  קטן מהיקף  $\beta$ .
6. יהי  $ABC$  משולש המכיל מעגל  $\omega$  ומוכל במעגל  $\Omega$ . נניח שהרדיוסים של  $\omega$  ושל  $\Omega$  הם  $r, R$  הוכיחו כי  $R \geq 2r$ .
7. יהי משולש  $ABC$  וישר  $l$  העובר דרך  $A$  ולא חותך את המשולש. מצאו את הישר  $l$  עבורו סכום המרחקים מ  $B$  ו  $C$  יהיה מקסימלי.
8. יהי משולש  $ABC$  חד זווית, מצאו את הנקודה שסכום מרחקיה מקודקודי המשולש מינימלי. האם הדבר נכון מתקיים גם במשולש כללי (לאו דווקא חד זווית)?
9. במרובע קמור ההיקף הוא  $P$  וסכום האלכסונים הוא  $D$ . מצאו את  $M$  המינימלי ואת  $m$  המקסימלי כך שיתקיים  $m \leq \frac{D}{P} \leq M$ .
10. נתון משולש משוכלל  $ABC$  ונקודה  $M$  בתוכו. מה טווח הערכים ש  $\sphericalangle MAB + \sphericalangle MBC + \sphericalangle MCA$  יכול לקבל?
11. נתון מחומש משוכלל  $ABCDE$  ונקודה במישור  $X$ . הוכיחו כי  $|AX| + |CX| + |EX| \geq |BX| + |DX|$ . מתי המקרה שיוויון?
12. אי שיויון ארדש מורדל- יהי משולש  $ABC$ . נתונה נקודה  $P$  במישור. נסמן ב  $R_A, R_B, R_C$  את המרחקים ש  $P$  מקודקודי המשולש המתאימים וב  $d_A, d_B, d_C$  המרחקים מהצלעות המתאימות. הוכיחו כי  $R_A + R_B + R_C \geq 2(d_A + d_B + d_C)$  ב.  $R_A R_B R_C \geq 8d_A d_B d_C$  א.

**בתאבון!**