פונקציות יוצרות

פונקציות יוצרות זו דרך לחקור סדרות בקומבי בעזרת אלגברה ואנליזה. הרעיון הבסיסי הוא לקחת את הסדרה ולהתאים לה ביטוי אלגברי, כך שפעולות בסיסיות על הסדרה יהפכו לפעולות אלגבריות על הביטוי, שאותן יהיה קל יותר להבין. הרעיון יהיה ברור אחרי שנציג כמה דוגמאות.

פיבונאצ'י

הדוגמא הכי בסיסית לשימוש של פונקציות יוצרות הוא פתירת נוסחת נסיגה, לדוגמא ניקח את סדרת פיבונאצ'י:

$$f_0 = 0, f_1 = 1$$

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

לסדרה הזו נתאים פונקצייה יוצרת, במקרה הזה "פולינום" עם f_n כמקדמים:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^n$$

שימו לב שכרגע הסימון הוא פורמלי לחלוטין, אנחנו לא יודעים אם אפשר להציב איזשהו x בנוסחא, אבל כל עוד אנחנו זהירים זה לא משנה.

עכשיו נוכל להשתמש בנוסחת הנסיגה:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^n = f_0 + f_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} f_n\, x^n =$$

$$= f_0 + f_1 x + \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2}\, x^{n+2} = f_0 + f_1 x + \sum_{n=0}^{\infty} (f_{n+1} + f_n)\, x^{n+2}$$

$$= x + \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}\, x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n\, x^{n+2} = x + xF(x) + x^2 F(x)$$

שימו לב שבמעבר האחרון השתמשנו בכך ש-$f_0 = 0$. אחרי העברת אגפים נקבל:

$$F(x)(1 - x - x^2) = x$$

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

ומצאנו את F! בנקודה הזו אפשר להסיק הרבה מסקנות, לדוגמא אנחנו מכירים את הנוסחא:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$$

ממנה נקבל:

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = x(1 + (x + x^2) + (x + x^2)^2 + \cdots)$$

שממנה אפשר לקבל ש-f_n שווה לכמות הדרכים לרצף שורה באורך $n-1$ עם משבצות ודומינו. עם קצת עבודה נוכל למצוא מפה את הנוסחא המדוייקת ל-f_n. המבינים במרוכבות יכולים להסיק מה סדר הגודל של f_n גם בלי זה.

הערה: דרך אחרת שיכלנו לבנות את המשוואה על $F(x)$ הייתה מהצד השני של הנוסחת נסיגה. הכפלה ב-x מזיזה את הסדרה, וחיבור פונקציות סוכם את הסדרות.

קטלן

עוד דוגמא מגניבה היא קטלן, נזכיר שמספר קטלן ה-n, C_n, מוגדר ככמות הדרכים לשים n סוגריים פותחות ו-n סוגרים סוגרות באופן חוקי.

נרשום לזה נוסחת נסיגה, בכל רשימה של סוגריים אנו מתחילים בסוגריים פותחות ומתישהו הן נסגרות. בין הפותח בהתחלה לסוגר שלו נגיד שיש k סוגריים, אז ה-k האלה מסודרים בצורה חוקית, וגם ה-$n-k-1$ שאחרי מסודרים חוקית, נקבל נוסחת נסיגה:

$$C_0 = 1$$

$$C_{n+1} = \sum_k C_k C_{n-k}$$

וננסה לפתור אותה. נרשום:

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

נוכל שוב להציב את נוסחת הנסיגה, אך נקבל ביטוי מסובך, יותר קל הפעם לשים שדרך לעשות את הסכום שב-*RHS* של נוסחת הנסיגה הוא על ידי העלה בריבוע:

$$C(x)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} C_k C_{(n-k)} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} x^n = \frac{C(x) - C_0}{x}$$

ואחרי העברת אגפים נקבל:

$$xC(x)^2 - C(x) + 1 = 0$$

$$C(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

קל להשתכנע שהסימן צריך להיות מינוס, אחרת הסכום לא יוגדר באפס, כדי לסיים צריך להשתמש בנוסחא:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n$$

כאשר מגדירים:

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{2}\cdot -\frac{3}{2}\cdot \ldots \cdot \left(\frac{3}{2}-n\right)}{n!}$$

אם נציב את זה בנוסחא שלנו נגלה שעבור $n > 0$:

$$C_n = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{2}\cdot -\frac{3}{2}\cdot \ldots \cdot \left(\frac{3}{2}-n-1\right)}{(n+1)!}\cdot(-4)^{n+1} =$$

$$= \frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot \ldots (2n-1)}{(n+1)!}\cdot 2^n$$

ובעזרת הנוסחא:

$$1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1) = \frac{2n!}{n!\cdot 2^n}$$

נקבל את הנוסחא הידועה:

$$C_n = \frac{2n!}{n!\cdot(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

הערה: אפשר לשאול מה המשמעות של הפתרון האחר למשוואה, אם נסתכל עליו נראה שהפתרון נראה מאוד דומה, המקדמים יקבלו סימן, אבל בנוסף יהיה לנו $C_{-1} = 1$, אם נרשום את נוסחת הנסיגה כאשר מרשים בה $k = -1$ מקבלים שהיא:

$$C_{n+1} = \sum_{k=-1}^{n+1} C_k C_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} + 2C_{n+1}$$

כלומר:

$$-C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$$

ואכן מינוס קטלן מקיימים את נוסחת הנסיגה הזו.

טיפ: בדוגמא האחרונה ראינו איך אפשר לפתור את נוסחת הנסיגה $\sum c_k c_{n-k}$, לפעמים הנוסחאת נסיגה נראית שונה, ואז יש לבחור פונקצייה יוצרת אחרת, דוגמא פופלרית לפונקצייה יוצרת שאפשר להתאים היא:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

אבל יכולות להופיע עוד סוגי פונקציות יוצרות, למשל בתורת המספרים אוהבים את הפונקצייה היוצרת:

$$a(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

קבוצות

עוד גרסא שימושית של פונקציות יוצרות יכולה לעזור להבין קבוצות (בדרך כלל של שלמים), נדגים עם שתי שאלות.

תרגיל – נתונים מספרים $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots b_k$, המספרים לאו דווקא שונים, אבל ה-a ו-b אינם תמורה אחד של השני. נתון ששתי הסדרות הבאות כן תמורות אחת של השנייה:

$$a_1 + a_2, a_1 + a_3, \dots, a_{k-1} + a_k$$

$$b_1 + b_2, b_1 + b_3, \dots, b_{k-1} + b_k$$

הוכיחו ש-k חזקת 2.

מכיוון שאנחנו מתענינים במספרים כקבוצה (או מולטי-קבוצה) ולא כסדרה, נבנה פונקציה יוצרת:

$$A(x) = \sum_{i=1}^{k} x^{a_i}$$

$$B(x) = \sum_{i=1}^{k} x^{b_i}$$

התנאי מקבל עכשיו נוסחא פשוטה, מכיוון ש:

$$A(x)^2 - A(x^2) = \sum_{i,j} x^{a_i + a_j} - \sum_{i} x^{2a_i} = 2\sum_{i<j} x^{a_i + a_j}$$

ועל כן נקבל:

$$A(x)^2 - A(x^2) = B(x)^2 - B(x^2)$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$\big(A(x) - B(x)\big) \cdot \big(A(x) + B(x)\big) = A(x)^2 - B(x)^2 = A(x^2) - B(x^2)$$

$$A(x) + B(x) = \frac{A(x^2) - B(x^2)}{A(x) - B(x)}$$

מה שנרצה לעשות כדי לסיים זה להציב 1 במשוואה, מכיוון ש-$A(1) = B(1) = k$, כדי לעשות את זה נרשום:

$$A(x) - B(x) = (x-1)^r H(x)$$

עם $H(1) \neq 0$, ואז נקבל:

$$\frac{A(x^2) - B(x^2)}{A(x) - B(x)} = \frac{(x^2-1)^r H(x^2)}{(x-1)^r H(x)} = (x+1)^r \frac{H(x^2)}{H(x)}$$

ומכאן נציב 1 ונקבל $2k = 2^r$ כרצוי.

שימו לב שהשתמשנו בזה שהסדרות לא זהות (עד כדי פרמוטציה) כשחילקנו ב-$A(x) - B(x)$, שימו לב גם שאפשר מפה להמציא בקלות דוגמא לזוג סדרות כאלה.

לכיף ניתן עוד דוגמא לשאלה שנפתרת בשיטה הזו.

הטבעיים חולקו לסדרות חשבוניות זרות $A_i = m_i + d_i\mathbb{Z}$ (לפחות שתי סדרות) הוכיחו שלפחות שניים מההפרשים שווים.

כמו קודם נגדיר:

$$A_i(x) = \sum_{a \in A_i} x^a$$

קל לראות ש:

$$A_i(x) = \frac{x^{m_i}}{1 - x^{d_i}}$$

וגם ש:

$$\sum A_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

שימו לב שהשיוויון שקיבלנו צריך להיות נכון ברמה של פולינומים, נבחר את ה-d_i הכי גדול, ונציב שורש יחידה פרימטיבי מסדר d_i, רוב הביטויים יצאו מספר כלשהו, אבל $\frac{1}{1-x_i^d}$, יצא אינסוף (כי חילקנו באפס), איך זה יכול להסתדר? אם יש גורם נוסף שיוצא אינסוף אז הם יכולים להצטמצם, אבל מכיוון ש-d_i מקסימלי זה יכול לקרות רק אם יש עוד סדרה עם אותו ההפרש.

הערה: למעשה הוכחנו שלכל הפרש שמופיע צריך להיות הפרש אחר שמתחלק בו.

נסיים עם שיטה אחרונה עם פונקציות יוצרות, זו השיטה הכי עדינה, אבל היא גם יכולה להיות מאוד חזקה, כרגיל נדגים עם דוגמא.

תרגיל – כמות הדרכים לרשום מספר טבעיים כסכום של מספרים טבעיים (חיוביים) שונים שווה לכמות הדרכים כמו להציג אותו כסכום אי-זוגיים.

שני הצדדים של המשוואה הם דברים שאין להם ביטוי יפה במיוחד, אבל מסתבר שלשניהם אפשר בכל זאת להבין מה הפונקציה היוצרת, ואם נראה שהן שוות ננצח.

נסתכל על המכפלה:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3) \cdot \ldots$$

זוהי מכפלה אינסופית, וכרגיל אנחנו לא הולכים להתייחס לענייני התכנסות, כל מה שאתם צריכים לשים לב הוא שכאשר תנסו לחשב מקדם של x^k ספיציפי, תקבלו סכום סופי מכיוון שבהכל חוץ מכמות סופית של גורמים חייבים לבחור להכפיל ב-1.

עכשיו גם אפשר לראות שהמקדמים הם בדיוק כמות הדרכים להציג מספר כסכום מספרים שונים.

באופן דומה הפונקצייה היוצרת לצד השני היא:

$$(1 + x + x^{2\cdot 1} + \cdots) \cdot (1 + x^3 + x^{2\cdot 3} + \cdots) \cdot \ldots$$

וסכום סדרה הנדסית אנחנו יודעים, זה יוצא:

$$\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\ldots$$

טוענים לנו ששתי המכפלות האינסופיות שוות, איך נראה זאת? נחלק את הפולינומים אחד בשני ונראה שיוצא 1!

במקום לרשום הכל נרשום חלק מהביטויים:

$$(1-x)\cdot(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^4)\cdot\ldots=(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdot\ldots=$$
$$=(1-x^4)(1+x^4)\cdot\ldots$$

וכך הלאה, המסקנה היא שהמכפלה האינסופית הזו היא 1, אכן כמו שאמרנו כל מקדם אפשר לחשב מכמות סופית מהנכפלים, ואחרי כמות סופית אנחנו נשארים עם רק מונומים מאוד גדולים.

אם נציב בנוסחא הזו x^{2k+1} ונכפיל את כל המשוואות האלה, נקבל את הרצוי.

תרגיל שאשעיר לכם הוא למצוא התאמה שמוכיחה את השיוויון, בונוס אם תבינו אותה מתוך הפונקציות היוצרות (זה אפשרי!).

הסיפור של פונקציות יוצרות לא נגמר פה, למעשה במובן מסויים זה אחת השיטות החזקות במתמטיקה, אם כי בד"כ באופן יותר מסובך, לדוגמא אפשר להסתכל על הפונקציה:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}}$$

מסתבר שהפונקציה הזו מקיימת משוואה פונקציונלית מאוד לא טריוואלית, גם אחרי שמעלים אותה ברביעית היא תקיים משוואה כזו. את הפונקציות שמקיימות משוואות כאלה אפשר לחקור, ואחרי שמעלים ברביעית אפשר למצוא את כולן, ולגלות בדיוק את הפונקציה שלנו, וכתוצאה נקבל בכמה דרכים מספר הוא סכום ארבע ריבועים.