משוואות פונקציונליות שלמות פתרונות

1. תהי $f\colon \mathbb{Z} \to \{1,2,\dots,10^{100}\}$ פונקציה עבורה לכל $x, y \in \mathbb{Z}$ מתקיים

$$\gcd\big(f(x), f(y)\big) = \gcd\,(f(x), x-y)$$

הראו כי קיימים שלמים m, n כך ש-$f(x) = \gcd\,(m + x, n)$ לכל x.

<u>פתרון:</u> נסמן $N = 10^{100}$ ונחבר ראשוני $p \le N$. יהי x כך ש-$v_p\big(f(x)\big)$ מקסימלי אזי לכל y מתקיים ש-

$$v_p\big(f(y)\big) = \min\{v_p\big(f(x)\big), x-y\}$$

ובפרט אם $y \equiv x \bmod p^{v_p(f(x))}$ אז

$$v_p\big(f(y)\big) = v_p\big(f(x)\big)$$

נבחר t כך שלכל p הוא יהיה שקול לערך עם ה-v_p המקסימלי אז לכל p מתקיים ש-

$$v_p\big(f(y)\big) = \min\{v_p\big(f(t)\big), t-y\}$$

ולכן $f(y) = \gcd\,(f(t), y-t)$ נשאר לבקש ש-t יהיה שלילי.

2. $n | f(a) - f(b) \Leftrightarrow f(n) | a - b$

<u>פתרון ראשון</u>: אם נבחר $1 \le a, b \le n+1$ אז

$n | f(a) - f(b) \Rightarrow f(n) | a - b \Rightarrow f(n) \le n$ ולכן בפרט

$f(1) = 1$. נבחר n מינימלי עבורו $f(n) \ne n$, כלומר $f(k) = k$ לכל

$k \le n-1$ ולכן קיים $1 \le l \le n-1$ כך ש-$f(n) = f(l) = l$ ולכן

$m | f(n) - f(l)$ לכל m, ולכן $f(m) | n - l$ נציב $m = n-1$ ונקבל

ש-$n - 1 | n - l$ ולכן $l = 1$ אם $n > 2$ אז $1 = f(n) | 2 - 1$ ולכן

$n | f(2) - f(1) = 1$ בסתירה ולכן במקרה הזה הפונקציה חייבת להיות הזהות.

ואם $n = 2$ אז $f(2) = 2$ ואז לכל m מקבלים $f(m) | f(2) - f(1) =$

0 ולכן $f(m) | 2 - 1$ ולכן הפונקציה זהותית 1.

__פתרון שני:__ נציב $b=a-1$ ונקבל ש-

$$n|f(a)-f(a-1) \Leftrightarrow f(n)|1$$

כלומר $|f(a)-f(a-1)|$ לא תלוי ב-a. אם קיים p ראשוני שמחלק את $|f(a)-f(a-1)|$ אז $f(p)=1$ אבל כיוון שכאשר זזים 1 בציר x זזים בפלוס מינוס קבוע בציר ה-y ואי אפשר לרדת מ-1 נקבל ש-

$$f(p-1)=f(p+1)$$

ולכן $f(n)|2$ לכל n. נשארנו עם 3 אופציות:

או שהפונקציה קבועה 1, זה פתרון.

או שהפונקציה קבועה 2, זה לא פתרון.

או שהפונקציה זיגזג בין 1 ל-2, זה לא פתרון כי ניקח a,b בהפרש 3 ואז f חצי מהנקודות מחלק את 3 אבל $|f(a)-f(b)|=1$ וזה לא מתחלק בחצי מהטבעיים.

נשאר המקרה שבו $|f(a)-f(a-1)|=1$. באופן דומה לקודם לא יכול להיות זיגזג מהצורה $f(a+2)=f(a)$ כי אז $f(n)|2$ ומקבלים שוב סתירה (או שהפוקצינה קבועה 1) ולכן במקרה זה נשארנו עם פונקציית הזהות.

.3

$$f(m)^2+f(n)|(m^2+n)^2$$

__פתרון:__ נציב $m=n=1$ ונקבל-$f(1)^2+f(1)|4$ ולכן $f(1)=1$.

נציב רק $m=1$ ונקבל ש-$f(n)+1|(n+1)^2$ נציב $n=p-1$ עבור p ראשוני כלשהו ונקבל ש-$f(p-1)+1|p^2$ נחלק לשני מקרים:

(i) $f(p-1)=p^2-1$ נציב $m=p-1, n=1$ ונקבל ש-

$$(p^2-1)^2+1|((p-1)^2+1)^2$$

נשים לב שהמקדים של p^4 בשני האגפים שווים ובאגף ימין המקדם של

p^3 שלילי כאשר באגף שמאל הוא 0 ולכן עבור p גדול מספיק אגף ימין יהיה קטן מאגף שמאל בסתירה.

(ii) $f(p-1)=p-1$, נציב $m=p-1$ ונקבל ש-

$f(n)+(p-1)^2|(n+(p-1)^2)^2$, מודולו אגף שמאל אגף ימין שווה ל-$\left(n-f(n)\right)^2$, כלומר לא תלוי בראשוני שהצבנו וכלן אם נבחר ראשוני גדול מספיק נקבל שאגף ימין שווה ל-0 ולכן

$f(n)=n$.

4.

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \quad p|f(n)\cdot\left(f(p-1)\right)!+n^{f(p)}$$

<u>פתרון:</u> נציב $n=1,p=2$ ונקבל ש-

$$2|f(1)f(1)!+1$$

ולכן $f(1)=1$. נציב רק $n=1$ ונקבל ש-

$$p|f(p-1)!+1$$

ולכן המשוואה המוקרית הופכת ל-

$$p|n^{f(p)}-f(n)$$

נבחר $n=q$ ראשוני ונקבל ש-$f(q)\equiv q^{f(p)} mod\ p$ בפרט $f(q)$ לא מתחלק בשום מלבד ל-q עצמו. נסמן $f(q)=q^m$ ונקבל ש-

$$f(n)\equiv n^{f(q)}=n^{q^m}\equiv n\ mod\ q$$

וזה נכון לכל q בפרט ל-q ממש גדול ולכן $f(n)=n$.

5.

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \quad 0\le y+f(x)-f^{f(y)}(x)\le 1$$

<u>פתרון:</u> ל-f אין נקודות שבת, אחרת נציב אחת כזו ב-x ונשאיף את y לאינסוף. ובעצם יותר מזה, לא יתכן ש-$f^i(x)=f^j(x)$, משיקול דומה, נקבע את x ונשאיף את y לאינסוף.

נסמן $f(1)=c>1$ ונציב $y=1$:

$$0 \leq 1 + f(x) - f^c(x) \leq 1$$

ולכן $f^c(x) = f(x) + 1$ כלומר לכל x בתמונה מתקיים ש-

$$f^{c-1}(x) = x + 1$$

נניח ש-$c > 2$, נבחר x בתמונה ושים לב שסדרת המספרים

$$\left\{f^{n(c-1)}(x)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

עוברת על כל השלמים הכל מ-$x + 1$ מסויים אבל זה גורר ש-$f^m(x)$ לכל m שלא מתחלק ב-$c - 1$ חייב להיות קטן מ-$x + 1$ ולכן יהיו שני m-ים שונים שיקלו את אותו הערך בסתירה.

לפיכך $f(1) = 2$ ומפה נובע ש-$f(f(x)) = f(x) + 1$ ובאינדוקציה מקבלים ש-$f(x) = x + 1$.

6. קבוצות המחלקים הראשוניים של $m + n$ ושל $f(m) + f(n)$ זהות.

<u>פתרון:</u> נגדיל את m ב-1 ונראה שאם p הוא מחלק ראשוני של $f(m + 1) - f(m)$ אז לכל n, p מחלק את $m + n$ אם ורק אם הוא מחלק את $m + 1 + n$ שזה כמובן לא יכול להתקיים ולכן

$$|f(m + 1) - f(m)| = 1$$

נציב $m = n = 1$ ונקבל ש-$2f(1)$ מתחלק רק ב-2, באופן דומה נציב $m = n = 2$ ונקבל שגם $f(2)$ הוא חזקת 2. שתי חזקות 2 היחידות שנמצאות בהפרש 1 הן 1,2 ולכן $f(1) = 2$ או ש-$f(1) = 1$.

במקרה הראשון מקבלים ש-$f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 2$ אבל אז $f(3) + f(2) = 3$ וזו סתירה.

נסיק ש-$f(1) = 1$. נציב $m = p - 1, n = 1$ ונקבל ש-$f(p - 1) + 1$ חזקה של p, בפרט $f(p - 1) \geq p - 1$ כלומר הפונקציה לפחות לינארית עם שיפוע 1 בראשוניים אבל היא לכל היותר לינארית עם שיפוע 1 ולכן $f(x) = x$ לכל x שלם.

7.

$$f\left(2f\left(f(n)\right) + m\right) = f(m) + 2n$$

<u>פתרון ראשון:</u> ברור שהפונקציה חח"ע, ברור גם ש-

$$f\big(k\cdot 2f\big(f(1)\big)+m\big)=f(m)+2k$$

אבל אגף ימין במשוואה האחרונה שווה ל-$f(2f\big(f(k)\big)+m)$ ולכן מקבלים ש-

$$kf\big(f(1)\big)=f(f(k))$$

בפרט יש מספרים זוגיים בתמונה. נתבונן במספר הזוגי המינימלי בתמונה, נסמן אותו A ו-$f(a)=A$. בנקודות $a+2kf(f(1))$ הפונקציה מקבלת את הערכים $A+2k$, כלומר ערכים זוגיים וברור שאלו כל המקומות בהם הפונקציה מקבלת ערכים זוגיים ולכן ב-$a+1$ הפונקציה מקבלת ערך אי-זוגי כלומר בתמונה יש גם מספרים אי-זוגיים. נסמן את המספר האי זוגי המינימלי מהתמונה ב-B ו-$f(b)=B$. באותה צורה כמו מקודם מקבלים שהפונקציה מקבלת ערכים אי זוגיים ב-$b+2kf(f(1))$ ואלו כל המקומות בהם הפונקציה מקבלת ערכים אי זוגיים.

כלומר התמונה ההפוכה של הפונקציה היא

$$\{a+2kf\big(f(1)\big)\}\cup\{b+2kf\big(f(1)\big)\}$$

ולכן זה כל המספרים הטבעיים ולכן $a=1,b=2$ או $b=1,a=2$.

בשני המקרים מקבלים ש-$f\big(f(1)\big)=1$ ולכן $f\big(f(k)\big)=k$ כלומר הפונקציה על ולכן $A=2,B=1$ ולכן אם $b=1,a=2$ אז $f(n)=n$ לכל n שזה בברור פתרון, ואם $b=2,a=1$ אז $f(2k+1)=2k+2$ ו- $f(2k+2)=2k+1$ וזה גם עובד.

<u>פתרון שני:</u> נשים לב שזו בעצם משוואת קושי ולכן מתקיים ש-

$$(*)\ 2f\big(f(n)\big)=2kn$$

ולכן המשוואה הופכת ל-

$$f(2kn+m)=f(m)+2n$$

נחליף ב-$(*)$ את n ב-$n+2k^2$ ונקבל ש-

$$f(f(n+2k^2)) = f(f(n)+2k) = f(f(n))+2 = kn+2$$

ולכן $k(n+2k^2) = kn+2$ כלומר $k=1$. נסיק ש-

$$f(m+2) = f(m)+2$$

ולכן הערים של $f(1), f(2)$ מקבעים את כל הפונקציה. נזכר ש-

$f(f(1)) = 1$ ובנוסף נשים לב ש-$f(k) \geq 3$ לכל $k \geq 3$ ולכן

$f(1), f(2) \in \{1,2\}$ וקל לראות שיש בדיוק שתי פונקציות שעובודות:

הזהות, ולהוסיף אחד באי-זוגיים ולחסר אחד בזוגיים כלומר

$$f(2k+1) = 2k+2, f(2k+2) = 2k+1$$

8. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ כך שלכל $a+b+c=0$ מתקיים ש-

$$f(a)+f(b)+f(c) = a^2+b^2+c^2$$

<u>פתרון ראשון:</u> נסמן $g(a) = f(a) - a^2$ ולכן

$$g(a)+g(b)+g(c) = 0$$

נציב $(a+1, b-1, c)$ ונקבל ש-

$$g(a+1)+g(b-1)+g(c) = 0$$

נחסר את שתי המשוואות האחרות ונקבל

$$g(a+1)-g(a) = g(b)-g(b-1)$$

כלומר הפונקציה לינארית. נציב ונקבל ש-$g(a) = ca$ עובד לכל a.

<u>פתרון שני:</u> אם $a=b=c=0$ אז $f(0)=0$. נציב $(a,-a,0)$ ונקבל

$$f(a)+f(-a) = 2a^2$$

עכשיו נציב $(a-1,-a,1)$ ונקבל ש-

$$f(a-1)+f(-a)+f(1) = 2a^2-2a+2$$

$$f(a)-f(a-1) = 2a+f(1)-2 = 2a-1+(f(1)-1)$$

נסמן $f(1)-1 = c$ ומאינדוקציה נקבל ש-

$$f(a) = a^2+ca$$

וזה עובד לכל c.

9. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ עבורן לכל x רציונלי, a שלם ו-b שלם חיובי מתקיים ש-

$$f\left(\frac{f(x)+a}{b}\right) = f\left(\frac{x+a}{b}\right)$$

<u>פתרון:</u> נציב $a = b = 1$ ונקבל ש-

$$f\big(f(x)\big) = f(x)$$

ולכן לפונקציה יש נקודת שבת $f(k) = k$. נניח ש-$f(n) = m \neq n$

ונציב $x = n$:

$$f\left(\frac{m+a}{b}\right) = f\left(\frac{n+a}{b}\right)$$

נבחר $b = d(n-m), a = c(n-m) - m$ ונקבל ש-

$$f\left(\frac{c}{d}\right) = f\left(\frac{c+1}{d}\right)$$

ולכן f קבועה, שזה כמובן פתרון. (הנחנו ש-$m > n$, אם $m < n$ מציבים $n - m$ בכל מקום).

אם f לא קבועה אז היא זהות על השלמים.

נציב $b = 1$ ונקבל ש-

$$f(x+a) = f(f(x)+a) = f(x) + a$$

ולכן מספיק להבין את f על קטע באורך 1. נפרק למקרים $f\left(\frac{1}{2}\right) n \geq 1$ או $0 \geq n = f\left(\frac{1}{2}\right)$.

במקרה הראשון נציב $a = n-1, b = 2n-1$ ונקבל ש-

$$f\left(\frac{\frac{1}{2}+n-1}{2n-1}\right)=n=f\left(\frac{2n-1}{2n-1}\right)=1$$

ולכן $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$ ו-$f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.

נוכיח באינדוקציה על n ש-$f\left(-\frac{1}{n}\right)=0$. נציב $x=-\frac{1}{n}, a=-1,$ $b=n+1$ ונקבל ש-

$$f\left(\frac{-1}{n+1}\right)=f\left(\frac{-\frac{1}{n}-1}{n+1}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=0$$

נשאר להוכיח שהפונקציה מתאפסת על כל השברים בקטע$(-1,0)$,

נוכיח זאת באינדוקציה על המונה. עבור השבר $-\frac{p}{q}$ נרשום $q=up+v$

(כאשר $0<v<p$). נציב $x=\frac{v-p}{pu+v}, a=-1, b=u+1$ ונקבל ש-

$$f\left(\frac{\frac{v-p}{pu+v}-1}{u+1}\right)=f\left(\frac{f\left(\frac{v-p}{pu+v}\right)-1}{u+1}\right)$$

אגף שמאל שווה ל-$f\left(-\frac{p}{u+1}\right)$ ועל פי הנחת האינדוקציה אגף ימין שווה ל-$f\left(-\frac{1}{u+1}\right)=0$ וניצחנו, קיבלנו ש-$f(x)=\lceil x\rceil$.

המקרה שבו $f\left(\frac{1}{2}\right)=n\leq 0$ זהה למקרה הראשון ונשאר בתור תרגיל לקורא.

.10

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\ \ \forall a,b\in\mathbb{N},\exists n\in\mathbb{N}: f(a)f(a+b)-ab=n^2$$

פתרון: יהי $p\neq 2$ ראשוני. נניח ש-$v_p(f(a))>v_p(a)$. נציב $b=1$ ונקבל ש-$f(a)f(a+1)-a$ ריבוע. כלומר

$$v_p(f(a)f(a+1)-a)=v_p(a)$$

זוגי, אז במשוואה

$$\frac{a}{p^{v_p(a)}}\cdot b+\left(\frac{n}{p^{\frac{v_p(a)}{2}}}\right)^2=\frac{f(a)}{p^{v_p(a)}}f(a+b)$$

אגף ימין מתחלק ב-p ולכן לכל b שזר ל-p מתקיים ש-

$$\frac{a}{p^{v_p(a)}}\cdot b$$

הוא שארית או לא שארית ריבועית כתלות באם -1 הוא שארית ריבועית מוד p אבל כאשר b עובר על כל המספרים (שזרים ל-p) הביטוי אמור לקבל גם שאריות ריבועיות וגם שאריות לא ריבועיות. סתירה.

סך הכל קיבלנו ש-$v_p\big(f(a)\big)\le v_p(a)$.

עבור 2 הטיעון לא עובד ואכן נקבל משהו פחות חזק:
אם $v_2\big(f(a)\big)>v_2(a)+1$ אז לא משנה אם נבחר את b להיות 1 או 2 בכל מקרה $v_2(f(a)f(a+b)-ab)=v_2(ab)$ ולכן נוכל לבחור את b להיות 1 או 2 בשביל להרוס את הריבועיות של המספר.

נסכם, $f(n)|2n$. לכן $f(1)=1,2$ ו-$f(2)=1,2,4$. נציב $a=b=1$ ונקבל ש-$f(1)f(2)-1$ ריבוע וישנם שני מקרים

מקרה ראשון, $f(1)=2$ ולכן $f(2)=1$. נציב $a=2,b=1$ ונקבל ש-$f(3)-2$ ריבוע. נציב $a=1,b=2$ ונקבל ש-$2f(3)-2$ ריבוע ולכן קל לראות ש-$f(3)=3$. נציב $a=b=2$ ונקבל ש-$f(4)-4$ ריבוע, בנוסף נציב $a=1,b=3$ ונקבל ש-$2f(4)-3$ ריבוע ולכן $2f(4)-3\equiv 1\ mod\ 8$ כלומר $f(4)\equiv 2\ mod\ 4$ אבל אז לא יכול להיות ש-$f(4)-4$ ריבוע כי הוא מתחלק ב-2 אבל לא ב-4.

מקרה שני, $f(1)=1$. נציב $a=1,b=n-1$ ונקבל ש-$f(n)-(n-1)$ ריבוע ובפרט $f(n)\ge n-1$ ולכן לכל $n>2$ מתקיים ש-$f(n)$ הוא n או $2n$. נציב $a=p,b=q-p$ כאשר p,q ראשוניים אי-זוגיים. נקבל ש-

$$f(p)f(q)-pq+p^2$$

ריבוע. אבל $v_p(pq) = v_p\left(f(p)f(q)\right) = 1$ ולכן $p|\frac{f(p)}{p}f(q) - q$ ונובע ש-$f(p) = p$.

נקבע n ונבחר $p > n$. נציב $a = n, b = p - n$ ונקבל ש-

$$p(f(n) - n) + n^2$$

ריבוע. אם $f(n) = 2n$ אז נקבל ש-$n(p + n)$ ריבוע אבל אם נבחר את p להיות מאוד גדול כך ש-n זר ל-$p + n$ ולכן n ריבוע ואפשר לבחור את p כך ש-$p + n$ יהיה שארית לא ריבועית מודולו ראשוני קטן כלשהו (לדוגמה 3).