

משוואות פונקציונליות שלמות

1. תהי $f: \mathbb{Z} \rightarrow \{1, 2, \dots, 10^{100}\}$ פונקציה עבודה לכל $x, y \in \mathbb{Z}$ מתקיים

$$\gcd(f(x), f(y)) = \gcd(f(x), x - y)$$

הראו כי קיימים שלמים m, n כך ש- $\gcd(m + x, n) = f(x)$ לכל x .

בשאלות הבאות יש למצוא את כל הפונקציות מ- $\mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ המקיימות את התנאים.

$$2. \quad n|f(a) - f(b) \Leftrightarrow f(n)|a - b$$

$$3. \quad f(m)^2 + f(n)|(m^2 + n)^2$$

$$4. \quad p|f(n) \cdot (f(p - 1))! + n^{f(p)}$$

$$5. \quad 0 \leq y + f(x) - f^{f(y)}(x) \leq 1$$

הערה: $f^n(x) := f(f(\dots(f(x))\dots))$ כאשר f מורכזת n פעמים.

6. קבוצות המחלקים הראשוניים של $m + n$ ושל $f(m) + f(n)$ זהות.

$$7. \quad f(2f(f(n)) + m) = f(m) + 2n$$

8. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ כך שלכל $a + b + c = 0$ מתקיים ש-

$$f(a) + f(b) + f(c) = a^2 + b^2 + c^2$$

9. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$ עבורן לכל x רציונלי, a שלם ו- b שלם חיובי מתקיים ש-

$$f\left(\frac{f(x) + a}{b}\right) = f\left(\frac{x + a}{b}\right)$$

10. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ כך שלכל a, b שלמים חיוביים

$$f(a)f(a + b) - ab$$

הוא ריבוע של מספר שלם.