

פונקציונליות על פונקציות

1. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}$ עבורן לכל $p, q \in \mathbb{Z}[x]$ מתקיים ש- $f(p+1) = f(p) + 1$ ואם $f(p) \neq 0$ אז $f(p) | f(p \cdot q)$.
2. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$ עבורן לכל $P, Q \in \mathbb{Q}[x]$ מתקיים ש- $f(P \cdot Q) = f(P) \cdot Q + P \cdot f(Q)$, $f(P \circ Q) = (f(P) \circ Q) \cdot f(Q)$
3. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ כך ש- $f(0) = 0$, לכל $P \neq 0$ מתקיים ש- $\deg(f(P)) \leq \deg(P) + 1$ ולכל $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ ל- $P - f(Q)$ ו- $Q - f(P)$ שורשים ממשיים (ללא ריבוי).
4. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ כך שלכל $P, Q \in \mathbb{Q}[x]$ מתקיים ש- $f(P \circ Q) = f(Q \circ P)$ ואם $PQ \neq 0$ אז $f(P \cdot Q) = f(P) + f(Q)$.
5. מצאו את כל הפונקציות החיבוריות $f: \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}[x]$ המקיימות של- $P \in \mathbb{Z}[x]$ יש שורש שלם אם ורק אם ל- $f(P)$ יש שורש שלם.
6. מצאו את כל הפונקציות הלינאריות $f: \mathbb{Q}[x] \rightarrow \mathbb{Q}[x]$ כך שאם $P \in \mathbb{Q}[x]$ אי-פריק אז גם $f(P)$ אי-פריק.
7. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}[x]$ עבורן לכל $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$ ו- $r \in \mathbb{Z}$ מתקיים ש- $P(r) | Q(r)$ אם ורק אם $f(P)(r) | f(Q)(r)$.
8. מצאו את כל הפונקציות הלינאריות $f: \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x]$ עבורן ל- $P \in \mathbb{C}[x]$ יש שורש כפול אם ורק אם $\gcd(P, f(P)) \neq 1$.
9. מצאו את כל הפונקציות $F: \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ עבורן לכל $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ מתקיים ש-

$$F(F(f) \circ g + g) = f \circ F(g) + F(F(F(g)))$$