ספירות

מומלץ להוכיח את הנוסחאות קומבינטורית. כי זה כיף.

1. נגדיר סדרה f_n כך: $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $f_0 = 0, f_1 = 1$ לכל n שלם. הוכיחו כי:

א.

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i} = f_{n+1}$$

ב.

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n-i}{j} \binom{n-j}{i} = f_{2n+2}$$

2. יהי z מספר ממשי.

נגדיר סדרה a_n כך: $a_{n+1} = a_n + z \cdot a_{n-1}$, $a_0 = 0, a_1 = 1$ לכל n שלם.

מצאו נוסחה קצרה עבור הביטוי הבא:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n-i}{i} z^i$$

3. א. יהי n שלם. הוכיחו כי אם נרשום את כל הדרכים לכתוב n כסכום של מספרים טבעיים (כל כמות של מספרים, מ1 עד n, עם חשיבות סדר), נחליף את כל ה-"+"-ים בסימני כפל, ונסכום את כל התוצאות – מה שנקבל יהיה מספר פיבונצ'י.

לדוגמה:

$$4 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 21 = f_8$$

ב. אם נמחק מהרשימה הקודמת את כל מספרים שאינם 1, ונסכום 2 בחזקת כמות ה-1-ים, נקבל מספר פיבונצ'י. לדוגמה:

$$2^0 + 2^1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^4 = 34 = f_9$$

4. א. הוכיחו כי כמות הסדרות באורך k של מספרים מ-1 עד n, כך שכל המספרים מופיעים בסדרה, היא

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^k$$

ב. הוכיחו כי לכל פולינום $p(x)$ מדרגה $n-1$ מתקיים

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} p(x+i) = 0$$

5. א. הוכיחו כי כמות העצים עם קודקודים $\{0,1,2,3,\dots,n\}$ היא $(n+1)^{n-1}$.

ב. הוכיחו כי כמות היערות עם k שורשים $\{r_1, r_2, \dots, r_k\}$ ו-n קודקודים נוספים $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ היא $(n+k)^{n-1} \cdot k$

ג. הוכיחו כי לכל n טבעי ולכל x, y ממשיים מתקיים

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \cdot (n+x+y)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (i+x)^{i-1} (n-i+y)^{n-i-1}$$

בתאבון!