# מספרי פיבונאצ'י

נגדיר סדרת מספרי פיבונצ'י $f_n$ בצורה הבאה: $f_0=0$ , $f_1=1$ , $\boxed{f_{n+2}=f_{n+1}+f_n}$.

נגדיר גם סדרת מספרי לוקס $l_n$ : $l_0=2$ , $l_1=1$ , $\boxed{l_{n+2}=l_{n+1}+l_n}$.

| $n$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_n$ | 2 | -1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | 144 | 233 |
| $l_n$ | -4 | 3 | -1 | 2 | 1 | 3 | 4 | 7 | 11 | 18 | 29 | 47 | 76 | 123 | 199 | 322 | 512 |

הוכיחו את הטענות הבאות:

1) $f_n+f_{n+2}=l_{n+1}$.

2) כמות הדרכים לרצף קטע באורך $n-1$ ע"י קטעים באורכים $1$ ו-$2$ שווה ל-$f_n$.

3) כמות הדרכים לרצף מעגל באורך $n$ עם נקודה מסומנת ע"י קטעים באורכים $1$ ו-$2$ שווה ל-$l_n$.

4) $\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2}-1$

5) $\sum_{i=0}^{n} f_{2i} = ?$

6) $\sum_{i=0}^{n} f_{3i} = ?$

7) $\sum_{i=0}^{n} f_i^2 = f_n f_{n+1}$

8) א. $f_{n+1}f_{n-1}-f_n^2=?$

ב. $f_n f_{n+3}-f_{n+1}f_{n+2}=?$

9) $\boxed{f_{n+1}f_{k+1}+f_n f_k=f_{n+k+1}}$.

10) א. $f_{n+1}^2=2f_n^2+2f_{n-1}^2-f_{n-2}^2$.

ב. $f_{n+1}^3=3f_n^3+6f_{n-1}^3-3f_{n-2}^3-f_{n-3}^3$.

11) $\operatorname{arccot}(f_{2n})=\operatorname{arccot}(f_{2n+1})+\operatorname{arccot}(f_{2n+2})$.

12) א. $\gcd\left(f_{f_{f_{2015}}}, f_{f_{f_{2020}}}\right)=?$,

ב. $\gcd\left(f_{f_{f_n}}, f_{f_{f_{n+4}}}\right)=?$.

13) $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{f_n \cdot f_{n-1} \cdot \ldots \cdot f_{n-k+1}}{f_k \cdot f_{k-1} \cdot \ldots \cdot f_1}$ הוא מספר שלם.

רמז: הראו כי $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = f_{n-k-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + f_{k+1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$.

14) $p^{k+1} \mid l_{p^{k+1}} - l_{p^k}$ עבור $p$ ראשוני אי-זוגי.

15) $f_{mq} = f_m \cdot \sum_{j=1}^{q} \left( \left( f_{m-1} \right)^{j-1} \cdot f_{m(q-j)+1} \right)$.

16) $f_{2n+2} = \sum_{j=0} \sum_{i=0} \binom{n-i}{j} \binom{n-j}{i}$.

17) נסמן $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , $\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. אזי: $\Phi \cdot \varphi = -1,\ \Phi^2 = \Phi + 1$ , $\varphi^2 = \varphi + 1$.

18) $\boxed{f_n = \frac{\Phi^n - \varphi^n}{\sqrt{5}}}$ , $\boxed{l_n = \Phi^n + \varphi^n}$

19) $\left( \frac{l_n \pm \sqrt{5} f_n}{2} \right)^k = \frac{l_{kn} \pm \sqrt{5} f_{kn}}{2}$.

20) $\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$.

21) הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_i}{2^i} = 2$.

22) הוכיחו כי $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{f_{2^k}} = 3 + \varphi$.