פיבונצ'י ועוד

חלק 0 – הגדרות וסימונים.

מספרי פיבונצ'י: f_n . **מספרי לוקס:** l_n

סדרה כללית המקיימת את אותה נוסחת נסיגה: g_n (ואם צריך אז גם h_n)

נסמן גם $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

הגדרות: $f_1 = 1$, $f_0 = 0$, $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ לכל n **שלם**.

$l_1 = 1$, $l_0 = 2$, $l_{n+2} = l_n + l_{n+1}$ לכל n שלם.

וגם $g_{n+2} = g_n + g_{n+1}$ לכל n שלם.

שימו לב כי גם הסדרות Φ^n , φ^n מקיימות את נוסחת נסיגה של פיבונצ'י.

(כלומר $x^{n+2} = x^{n+1} + x^n$ מתקיים עבור $x = \Phi, \varphi$)

עוד סימונים: $n!_f = f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n$. למספר $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n!_f}{k!_f \cdot (n-k)!_f}$ נקרא המקדם הפיבונומי n מעל k.

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
f_n	2	-1	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
l_n	-4	3	-1	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	512

חלק 1 – נוסחאות חשובות ומגניבות

$$l_{-n} = (-1)^n l_n \qquad , f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$$

$$(-1)^m 2 f_{n-m} = f_n l_m - f_m l_n \ , 2 f_{n+m} = f_n l_m + f_m l_n$$

$$(-1)^k g_n f_{m-k} + (-1)^m g_k f_{n-m} + (-1)^n g_m f_{k-n} = 0$$

$$g_{n+m+1} = g_{n+1} f_{m+1} + g_n f_m , \quad g_{n+m} + (-1)^m g_{n-m} = \ell_m g_n$$

$$l_{2n} = l_n^2 - 2 \cdot (-1)^n = 5 f_n^2 + 2 \cdot (-1)^n \ , \ f_{2n} = f_n l_n$$

$$g_{m+2k} = (-1)^{k+1} g_m \pmod{\ell_k}$$

פיבונצ'י ועוד

חלק 1 – נוסחאות בסיסיות ושימושיות

א. נוסחאות לינאריות: $\ell_n = f_{n-1} + f_{n+1}$, $5f_n = \ell_{n-1} + \ell_{n+1}$,

$f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$, $l_{-n} = (-1)^n l_n$,

$$g_n = g_1 f_{n+1} - g_{-1} f_{n-1} = g_1 f_n + g_0 f_{n-1} = \left(\frac{g_1 + g_{-1}}{2}\right) f_n + \left(\frac{g_1 - g_{-1}}{2}\right) l_n ,$$

$$f_n = \frac{g_0 \cdot g_{n+1} - g_1 \cdot g_n}{g_0 g_2 - g_1^{\ 2}}$$

$$f_n = \frac{\Phi^n - \varphi^n}{\sqrt{5}} \ , \ l_n = \Phi^n + \varphi^n \ , \ \Phi^n = \frac{l_n + \sqrt{5} \cdot f_n}{2} \ , \ \varphi^n = \frac{l_n - \sqrt{5} \cdot f_n}{2}.$$

ב. נוסחאות בילינאריות: $g_{n+m+1} = g_{n+1} f_{m+1} + g_n f_m$ (בפרט עבור $g = f$ ו $g = l$)

$$g_{n-m} = (-1)^m \left(f_{m+1} g_n - f_m g_{n+1} \right) \ , \ 5f_{n+k+1} = l_{n+1} l_{k+1} + l_n l_k$$

$$2f_{n+m} = f_n l_m + f_m l_n \ , \ 2l_{n+m} = l_m l_n + 5 f_m f_n ,$$

$$(-1)^m 2f_{n-m} = f_n l_m - f_m l_n \ , \ (-1)^m 2l_{n-m} = l_m l_n - 5 f_m f_n .$$

$$g_{n+m} + (-1)^m g_{n-m} = \ell_m \cdot g_n$$

נוסחאות ריבועיות:

$$f_{2n} = f_n l_n \ , \ l_{2n} = l_n^{\ 2} - 2 \cdot (-1)^n = 5 f_n^{\ 2} + 2 \cdot (-1)^n \ , \ l_n^{\ 2} - 5 f_n^{\ 2} = 4 \cdot (-1)^n ,$$

$$f_{n+1}^{\ 2} = 2 f_n^{\ 2} + 2 f_{n-1}^{\ 2} - f_{n-2}^{\ 2} \ , \ f_{n+k} \cdot f_{n-k} - f_n^{\ 2} = (-1)^{n+k+1} f_k^{\ 2} .$$

נוסחה טרילינארית:

$g_{m+n+k} f_k = g_{m+k} f_{n+k} + (-1)^{k+1} g_m f_n$ (כמו משפט תלמי)

או $(-1)^k g_n f_{m-k} + (-1)^m g_k f_{n-m} + (-1)^n g_m f_{k-n} = 0$

או $$g_{m+k} = \frac{f_k g_{m+l} + (-1)^k f_{l-k} g_m}{f_l}$$

ג. נוסחאות תורת המספרים:

$$f_{nk} = 0 \left(\operatorname{mod} f_k \right) \ , g_{m+2k} = (-1)^{k+1} g_m \left(\operatorname{mod} \ell_k \right)$$

$$\gcd\left(f_n, f_m \right) = f_{\gcd(m,n)} \ , \ \gcd\left(f_n, \ell_n \right) = \begin{cases} 2 & 3 \mid n \\ 1 & 3 \nmid n \end{cases} .$$

$$\ell_{m+12} = \ell_m \left(\operatorname{mod} 8 \right) \ , \ 2 \mid \ell_n \iff 3 \mid n \ , \ 3 \mid \ell_n \iff 4 \mid n+2 \ ,$$

$$2 \mid k \ \& \ 3 \nmid k \Rightarrow k = 3 \left(\operatorname{mod} 4 \right)$$

פיבונצ'י ועוד

חלק 2 – פיבונומים

1. הוכיחו כי $\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}$ הוא מספר שלם.

   רמז: הוכיחו כי $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = f_{n-k-1}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + f_{k+1}\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$.

2. הוכיחו את הנוסחה הבאה: $\sum_{k=0}^{d}\begin{bmatrix} d \\ k \end{bmatrix}(-1)^{\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil} {f_{m-k}}^{d-1} = 0$, לכל $d>0$ ולכל m שלם.

חלק 3 – 144

1. הוכיחו כי אם $l_n = k^2$ אז $n = 1,3$.
2. הוכיחו כי אם $l_n = 2k^2$ אז $n = 0, \pm 6$.
3. הוכיחו כי אם $f_n = k^2$ אז $n = 0, \pm 1, 2, 12$.
4. הוכיחו כי אם $f_n = 2k^2$ אז $n = 0, \pm 3, 6$.

חלק 5 – קומבינטוריקה

1) א) הוכיחו כי כמות הדרכים לרצף קטע באורך $n-1$ ע"י קטעים באורכים 1 ו-2 שווה ל-f_n.
ב) הוכיחו כי כמות הדרכים לרצף מעגל באורך n עם נקודה מסומנת ע"י קטעים באורכים 1 ו-2 שווה ל-l_n.

2) א) הוכיחו כי $f_{n+1} = \sum_{i=0}\binom{n-i}{i}$ (או $f_n = \sum_{i=1}^{\infty}\binom{n-i}{i-1}$)
ב) הוכיחו כי $f_{2n+2} = \sum_{j=0}\sum_{i=0}\binom{n-i}{j}\binom{n-j}{i}$

3) הוכיחו כי $\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$, $\sum_{i=0}^{n} f_{2i} = f_{2n+1} - 1$, $\sum_{i=0}^{n} f_{2i+1} = f_{2n+2}$.

4) הוכיחו כי $\sum_{i=0}^{n} f_i^2 = f_n f_{n+1}$.

5) הוכיחו כי $f_{mq} = f_m \cdot \sum_{j=1}^{q}\left((f_{m-1})^{j-1} \cdot f_{m(q-j)+1} \right)$.

6) הוכיחו כי $f_{pt+m} = \sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i} f_{m+i} f_t^{\,i} {f_{t-1}}^{p-i}$

7) הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_i}{2^i} = 2$.

פיבונצ'י ועוד

חלק 8 - ועוד

הוכיחו כי:

1) $f_{3n} = f_n\left(l_n^{\,2} + (-1)^n\right)$, $l_{3n} = l_n\left(l_n^{\,2} - 3\cdot(-1)^n\right)$.

2) $\left(\frac{l_n + \sqrt{5}f_n}{2}\right)^k = \frac{l_{nk} + \sqrt{5}f_{nk}}{2}$.

3) $f_{n+2}f_{n+1}f_{n-1}f_{n-2} + 1 = f_n^{\,4}$.

4) $l_{n+2}l_{n+1}l_{n-1}l_{n-2} + 25 = l_n^{\,4}$.

5) $f_{n-3}f_{n-2}f_{n-1}f_{n+1}f_{n+2}f_{n+3} + l_n^{\,2} = f_n^{\,2}\cdot\left(2f_{n-1}f_{n+1} - f_n^{\,2}\right)^2$

6) $\left(l_{n-1}l_{n+2}\right)^2 + \left(2l_nl_{n+1}\right)^2 = \left(5f_{2n+1}\right)^2$

7) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{f_{2^k}} = 3 + \varphi$.

8) $p^{k+1} \mid l_{p^{k+1}} - l_{p^k}$ עבור p ראשוני אי-זוגי.

9) $\operatorname{arccot}(f_{2n}) = \operatorname{arccot}(f_{2n+1}) + \operatorname{arccot}(f_{2n+2})$.

10) $g_{n+m+k} = f_{m+1}f_{n+1}g_{k+1} + f_nf_mg_k - f_{n-1}f_{m-1}g_{k-1}$.

11) $f_{n+a+b+c}f_{n-a}f_{n-b}f_{n-c} - f_{n-a-b-c}f_{n+a}f_{n+b}f_{n+c} = (-1)^{n+a+b+c}f_{a+b}f_{a+c}f_{b+c}f_{2n}$.

12) $g_nh_{n+i+k} - g_{n+i}h_{n+k} = (-1)^n\left(g_0h_{i+k} - g_ih_k\right)$.