<u>משפט פוירבך</u>

<u>הוכחה ראשונה, מרחק בין מרכזים:</u>

<u>למה, נוסחת אורך בבריצנטריות.</u> אם הקואורדינטות הבריצנטריות של X הן (α,β,γ) ו-Y זו נקודה במישור אז

$$XY^2=\sum \alpha AY^2-\alpha\beta AB^2$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
XY^2=\left(\alpha(Y-A)+\beta(Y-B)+\gamma(Y-C)\right)^2&=\sum \alpha^2AY^2+2\alpha\beta(Y-A)(Y-B)\\
&=\sum \alpha^2AY^2+\alpha\beta(AY^2+BY^2-AB^2)\\
&=\sum(\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\gamma)AY^2-\alpha\beta AB^2=\\
=\sum \alpha AY^2-\alpha\beta AB^2&
\end{aligned}$$

אורך של AN^2 (בתור תיכון במשולש AOH):

$$\begin{aligned}
4AN^2=2AH^2+2AO^2-HO^2&=2(B+C)^2+2A^2-(A+B+C)^2\\
&=B^2+C^2+A^2-2A\cdot B-2A\cdot C+2B\cdot C
\end{aligned}$$

$$AB^2=|A-B|^2=2R^2-2A\cdot B$$

$$4AN^2=AB^2+AC^2-BC^2+R^2$$

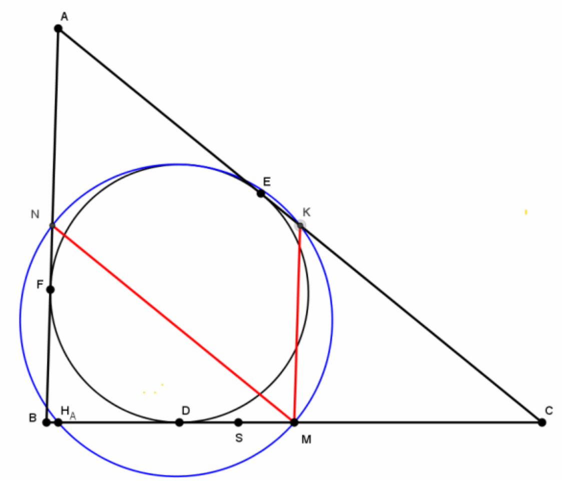
הקואורדינטות של I: $I=\left(\frac{BC}{2p},\frac{AC}{2p},\frac{AB}{2p}\right)$. חישוב האורך של IN:

$$\begin{aligned}
IN^2=\sum\frac{BC}{2p}AN^2-\frac{AC\cdot BC\cdot AB^2}{4p^2}&=\sum\frac{BC}{8p}(AB^2+AC^2-BC^2+R^2)-\frac{AC\cdot BC\cdot AB^2}{4p^2}\\
&=\frac{R^2}{4}+\left[\sum\frac{-BC^3+AB^2\cdot BC+AC^2\cdot BC}{8p}\right]-\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{2p}\\
&=\frac{R^2}{4}-\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{2p}\\
&+\frac{(AB+BC-AC)(AB-BC+AC)(-AB+BC+AC)+2AB\cdot AC\cdot BC}{8p}\\
&=\frac{R^2}{4}-\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4p}+\frac{(2p-2AB)(2p-2BC)(2p-2AC)}{8p}\\
&=\frac{R^2}{4}-\frac{AB\cdot BC\cdot AC}{4p}+\frac{S_{ABC}^2}{p^2}=\frac{R^2}{4}-Rr+r^2=\left(\frac{R}{2}-r\right)^2
\end{aligned}$$

הוכחה 2, קייסי: בודקים תנאי קייסי

$$MD \cdot NK + MK \cdot FN = \frac{b-c}{2} \cdot \frac{a}{2} + \frac{c}{2} \cdot \frac{a-b}{2} = \frac{b(a-c)}{4} = \frac{b}{2} \cdot \frac{a-c}{2} = MN \cdot KE$$

הוכחה 3, אינוורסיה מאמצע צלע:



$$BS = \frac{ac}{b+c}, MS = \frac{a}{2} - \frac{ac}{b+c} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)}$$

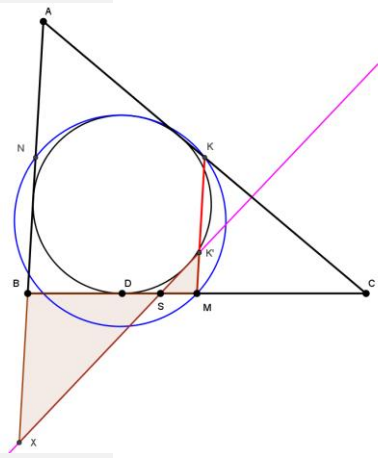
$$MD = \frac{b-c}{2}$$

$$BH_A = c \cdot cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$$

$$MH_A = \frac{a}{2} - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a} = \frac{b^2-c^2}{2a}$$

$$MH_A \cdot MS = \frac{(b-c)^2}{4} = MD^2$$

לכן אינוורסיה עם מרכז M ורדיוס MD מעבירה את H_A ל-S. מעגל 9 הנקודות באינוורסיה הזו הופך לישר שעובר ב-S ומקביל למשיק ל-9 הנקודות ב-M. ביחס לישרים MK, MN המשיק הזה אנטי מקביל ל-KN ולכן אחרי אינוורסיה מעגל 9 נקודות עובר לישר דרך S שביחס לצלעות AB, AC אנטי מקביל לצלע BC כלומר הוא השיקוף של BC ביחס לחוצה הזווית של $\angle BAC$ וזה בדיוק המשיק המשותף השני של מעגל חסום וחסום מבחוץ.



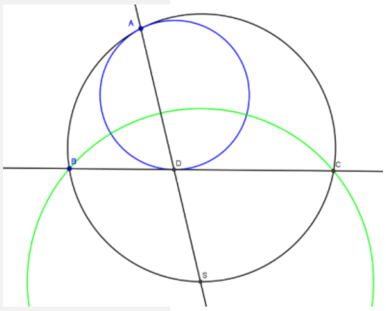
טיעון יותר טוב ללמה S ו-H_A אינוורסיות: $(A, S, I, I_A) = -1$ נטיל במאונך ל-BC ונקבל ש-$(H_A, S, D, D') = -1$ כאשר D' זו השקה של חסום מבחוץ. נובע מייד ש-H_A, S אינוורסיות ביחס למעגל עם קוטר DD'.

<u>הוכחה 3':</u> נסמן את המשיק המשותף השני של המעגל החסום והחסום מבחוץ ב-l וב-K' את נקודת החיתוך של l עם MK. אם נוכיח ש-K, K' אינוורסייות (אותה אינוורסיה מההוכחה הקודמת) ננצח (כי אז מאותו טיעון גם N עוברת לנקודה על המשיק המשותף).
נסמן את החיתוך של l עם AB ב-X ונשים לב שמשיקוף ביחס לחוצה זווית מקבלים ש-$BX = b - c$. המשולשים $MK'S$ ו-BXS דומים ולכן

$$MK' = \frac{BX \cdot MS}{BS} = \frac{(b-c)\dfrac{a(b-c)}{2(b+c)}}{\dfrac{ac}{b+c}} = \frac{(b-c)^2}{2c}$$

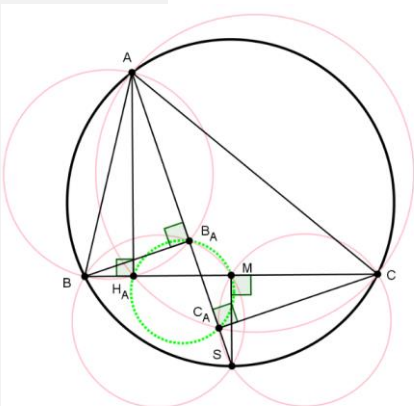
ולכן $MK' \cdot MK = \frac{(b-c)^2}{2c} \cdot \frac{c}{2} = MD^2$.

<u>הוכחה 4, למה אירנית:</u>



למה: יהי מעגל Ω ומיתר BC שלו. נסמן ב-S את אחד מאמצעי הקשתות BC. נתון מעגל ω המשיק למיתר BC בנקודה D, אזי ω משיק ל-Ω אם ורק אם הוא מאונך למעגל הם מרכז ב-S ורדיוס SB.

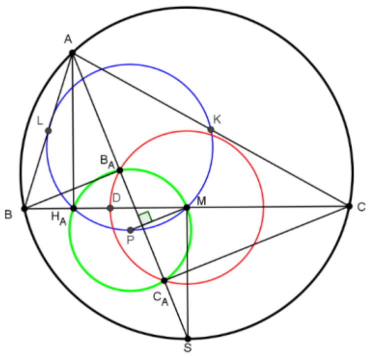
הוכחת הלמה: אם המעגלים משיקים אז A, D, S ישר ואינוורסיה ב-S עם רדיוס SB מחליפה בין BC ל-Ω ולכן שומרת את על ω.
בכיוון ההפוך, נניח בשלילה ש-ω לא משיק ל-Ω. נבנה מעגל ω' שמשיק ל-Ωבנקודה A ולמיתר BC ב-D. נניח ש-ω, ω' נחתכים שנית בנקודה E. כפי שאני כבר יודעים ω' מאונך למעגל (S, SB) ולכן S נמצא על הציר הרדיקלי של ω, ω' כלומר E נמצאת על AD ונובע ש-ω משיק ל-Ω.



<u>הוכחה של פויברך:</u> נסמן ב-B_A, C_A את עקבי האנכים מ-B, C לחוצה הזווית של A. S היא אמצע קשת BC.

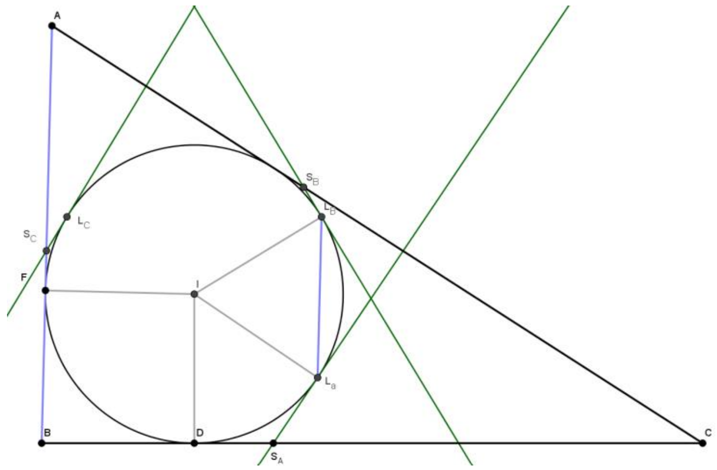
ממשפט קליפורד על המרובע $ABSC$ והמעגלים שהקטרים שלהם הם צלעות המרובע נובע ש-H_A, C_A, M, B_A מעגל. נטען שאמצע הקשת H_AM במעגל 9 הנקודות הוא מרכז של המעגל שהוכחנו, נסמן את הנקודה הזו ב-P. אכן ברור ש-P נמצאת במרחקים שווים מ-H_A, M, בנוסף PM הוא חוצה הזווית החיצוני במשולש MKL ולכן $AS \perp PM$ אבל M זו אמצע BC ולכן כאשר הולכים במאונך לחוצה הזווית של A מקבלים ש-P נמצאת במרחקים שווים מ-B_A, C_A.

נשים לב שמהלמה האירנית נובע ש-$MB_A = MD = MC_A$ ולכן יש מעגל עם מרכז ב- M שעובר ב-D, B_A, C_A, מעגל זה כמובן מאונך למעגל החסום.
נשאר רק לציין שמרכז המעגל החסום נמצא על הציר הרדיקלי של המעגלים $(M, MD), (P, PM)$ ולכן המעגל החסום מאונך גם למעגל (P, PM) ומהלמה שלנו נובע שהמעגל החסום משיק למעגל 9 הנקודות.



הוכחה 5, הומותטיה:

סימונים: S_A, S_B, S_C עקבי חוצי זוויות. המשיק השני מ-S_A למעגל החוסם משיק ב-L_A, באופן דומה נגדיר את L_B, L_C.



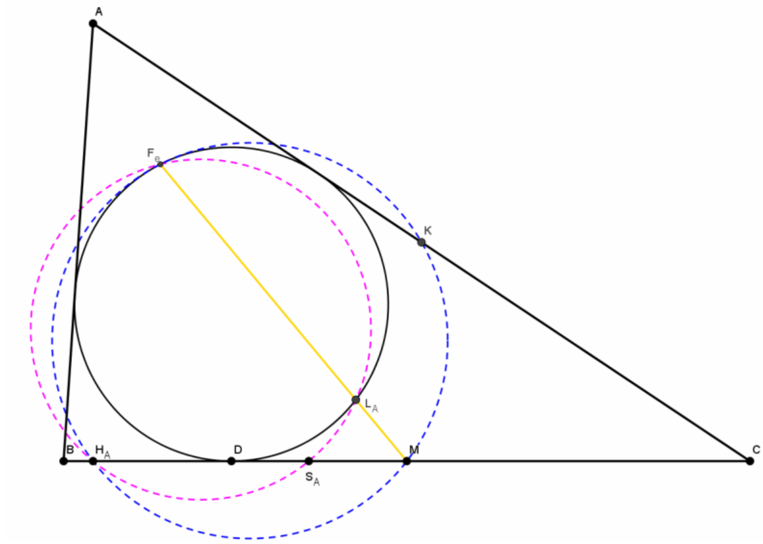
למה 1: $L_A, L_B || AB$.

הוכחה:

$$\angle FIL_A = \angle FID + \angle DIL_A = 180 - \beta + 2\angle DIS_A = 180 - \beta + 2\left(\frac{\alpha}{2} - (90 - \beta)\right) = \alpha + \beta$$

באותו אופן נקבל ש-$\angle FIL_B = \alpha + \beta$ ולכן L_A, L_B סימטריות ביחס ל-LF.

נסמן את החיתוך השני של ML_A עם המעגל החסום ב-F_e.



למה 2: $F_eL_AS_AH_A$ מעגל.

הוכחה: מחישוב שעשינו בהוכחה 2 ואחנו יודעים ש-$MH_A \cdot MS_A = MD^2 = ML_A \cdot MF_e$.

למה 3: MKF_eH_A מעגל.

הוכחה:

$$\angle MF_eH_A = \angle MS_AL_A = \angle MS_AA - \angle L_AS_AA = \beta + \frac{\alpha}{2} - \angle BS_AA = \beta + \frac{\alpha}{2} - \gamma - \frac{\alpha}{2} = \beta - \gamma$$

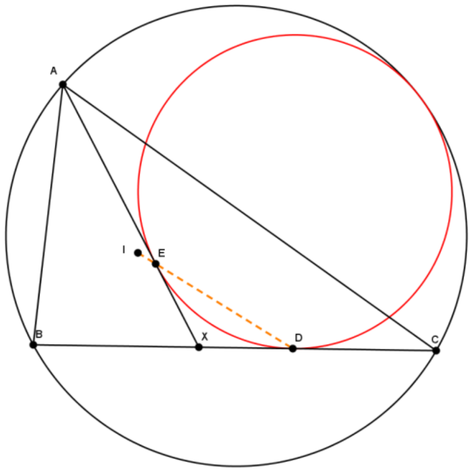
$$\angle MKH_A = \angle CMK - \angle CH_AK = \beta - \gamma$$

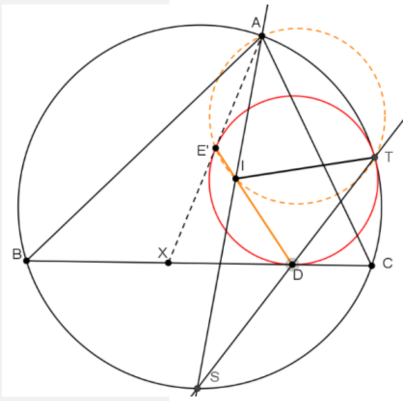
מסכנה: $\angle MF_eK = \angle MH_AK = \gamma$ אבל מלמה 1 $\widehat{L_AL_B} = \gamma$ ולכן F_eK חותך את המעגל שנית ב-L_B ובאופן דומה נקבל גם ש-N, L_C, F_e ישר.

נשאר רק להגיד שהומוטתיה מ-F_e מעבירה את MKN ל-$L_AL_BL_C$ ולכן המעגלים החוסמים משיקים.

<u>הוכחה 6, סוויאמה:</u>

הלמה של סוויאמה: על השיר BC של משולש ABC נבחרה נקודה X. מעגל ω משיק למעגל החוסם של ABC ול-AX, CX בנקודות D, E אז DE עובר במרכז המעגל החסום ב-ABC.





<u>הוכחה לסוויאמה:</u> נסמן את אמצע הקשת BC ב-S ואת נקודות ההשקה של ω עם ABC ב-T. נסמן גם ב-E' את נקודות החיתוך השנייה של DI עם ω. אינוורסיה ב-S עם רדיוס SI שומרת על ω ולכן S, D, T ישר. נשים לב ש-

$$\angle TAS = \angle TDC = \angle TE'D$$

ולכן A, T, I, E' מעגל ולכן מתקיים ש-

$$\angle AE'T = \angle AIT = \angle TDI$$

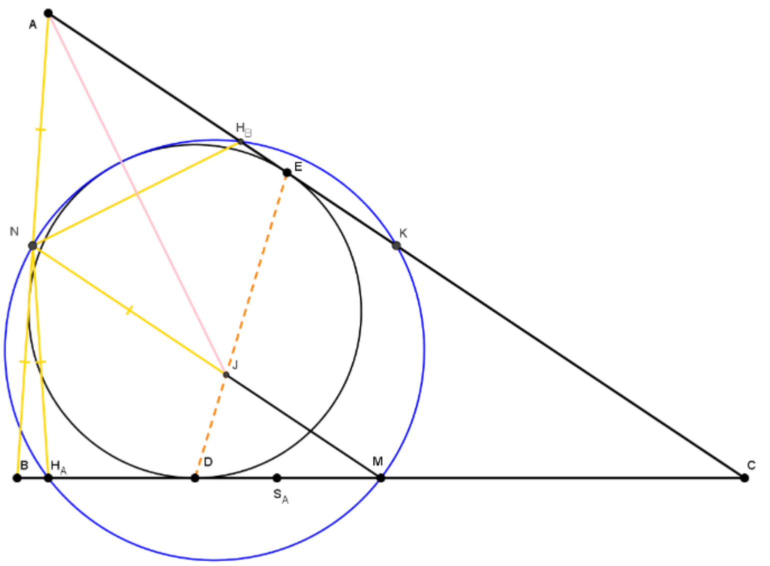
כאשר השוויון האחרון ברור מהאינוורסיה. קיבלנו ש-AE' משיק ל-ω.

טענה: נסמן ב-J את מרכז המעגל החסום במשולש MH_AH_B אז D, E, J ישר.

הוכחה: N זו אמצע קשת H_AH_B במעגל החוסם ולכן מתלתן נקבל ש-$NB = NC = NH_A = NH_B = NJ$.

עכשיו מצד אחד המשולש ANJ שווה שוקיים ומצד שני $NJ||AC$ ולכן $\angle NAJ = \angle AJN = \angle JAC$ ולכן AJ הוא חוצה זווית של $\angle BAC$ ומהלמה האירנית נקבל ש-J על DE.

מהכיוון ההפוך של סוויאמה במשולש MH_AH_B כאשר הנקודה על הצלע MH_A זו C מקבלים שהמעגל שמשיק ל-CH_A, C_{HB} בנקודות D, E משיק למעגל החוסם של MH_AH_B, מש"ל.



<u>הוכחה 7, סוויאמה אחר:</u>

טענה: נתונים מעגלים Ω, Γ שנחתכים בנקודות B, C. על מעגל Γ נבחרת נקודה A. נסמן ב-r את רדיוס המעגל החוסם במשולש ABC וב-R את רדיוס המעגל שמשיק לקרניים AB, AC ומשיק מבפנים למעגל Ω. אזי $\frac{r}{R}$ אינו תלוי בבחירה של A.

הוכחה: נסמן ב-I את מרכז המעגל החסום ב-ABC וב-ω את המעגל שמשיק ל-AB, AC, Ω וב-J את מרכזו. נסמן ב-D, E את נקודות ההשקה של ω עם AB, AC ונסמן ב-F את החיתוך השני של AC עם Ω. נטען שכל המרובעים (המנוונים) $ADJI$ דומים זה לזה. ברור ש-ADJ תמיד דומה לעצמו. צריך להוכיח ש-$\angle JDI$ קבועה אבל $\angle IDE$ קבועה ולכן מספיק להוכיח ש-$\angle EDI$ קבועה. נסמן ב-X את נקודת החיתוך של DE עם CI. ממשפט הסגמנט במשולש BCF עם נקודה A על הצלע CF והמעגל ω שמשיק למעגל BCF נקבל שמרכז המעגל החסום ב-BCF נמצא על DE, הוא כמובן נמצא גם על CI ולכן זה X.

נשים לב ש-$\angle IXD = \angle BIC$ (אם מסובבים ב-$90°$ אז $\angle IXD$ הופכת לזווית בין חוצה זווית של A לחוצה הזווית החיצוני של C והיא שווה ל-$\angle BIC$ כי תלתן). נסיק ש-$IXBD$ מעגל ולכן

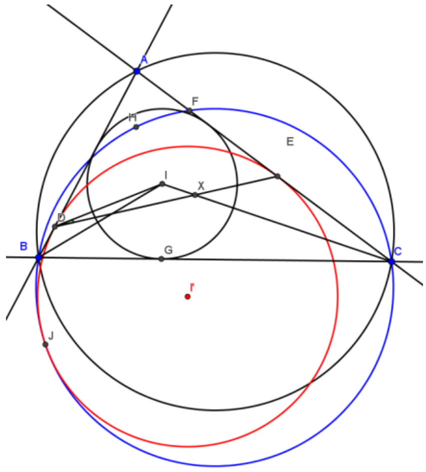
$$\angle XDI = \angle XBI = \angle CBI - \angle CBX = \frac{1}{2}(\angle CBA - \angle CBF) = \frac{1}{2}\angle FBA$$

אבל $\angle FBA$ קבועה כי במשולש FBA שתי הזוויות האחרות קבועות (הן נשענות על BC ב-Γ, Ω).

הוכחה של פוירבך: נבחר את Ω מהלמה להיות המעגל BCH ואת Γ להיות המעגל החוסם של ABC. נבדוק מה יחס הרדיוסים כאשר A נמצאת באמצע קשת BC. הנקודה הדרומית ב-ω היא השיקוף של A ביחס ל-BC ולכן הומוטתיה עם מקדם חצי מעבירה את ω למעגל החסום.

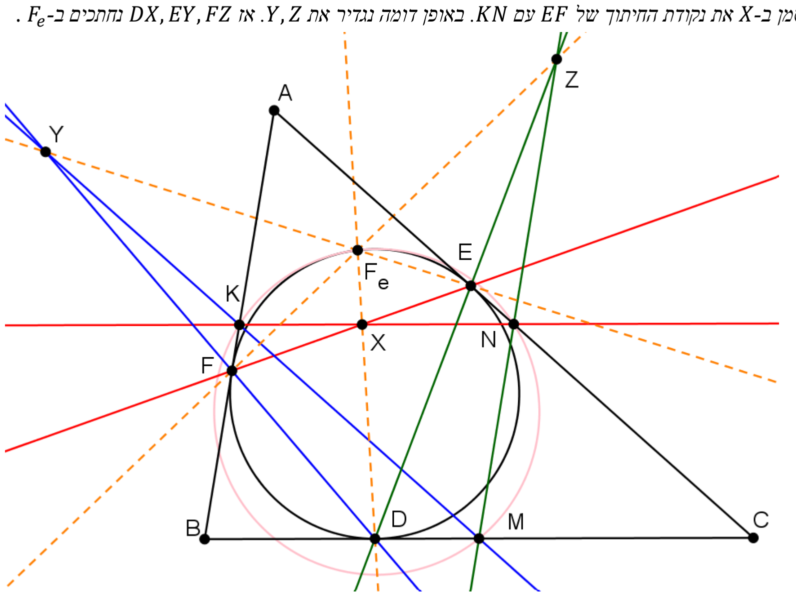
לפיכך לכל בחירה של A יחס הרדיוסים הוא 1 ל-2 ולכן תמיד קיימת הומותטיה מ-A עם מקדם חצי שמעבירה את ω למעגל החסום אבל הומותטיה זו תעביר את Ω למעגל שעובר באמצעים של AB, AC, AH ולכן למעגל 9 הנקודות ולכן הם משיקים .

הערה: *כדאי לציין שיש חלק של כיוונים מכיוון שיש שני מעגלים שמשיקים ל-Ω מבפנים ול-AB ו-AC. בהוכחה הגדרנו X כחיתוך DE ו-CI וטענו שזה מרכז מעגל חסום במשולש BCF, אבל עבור המעגל השני הישר בין נקודות ההשקה מקביל ל-DE ובפרט לא יכול לעבור באותה נקודה הטענה היא שהוא עובר או במרכז המעגל החסום, או . עוברים דרך CI ו-DE הישרים ω-רק צריך להבין עבור איזה משני ה .B המעגל החסום מבחוץ, במקרה שלנו מול חוצה זווית פנימי, אחרת CI ואז C-ל A בין F זה תלוי האם CI אותו מרכז מעגל ולבחור את המעגל המתאים .עבור כי אם הם מאותו צד הם ,BS-ביחס ל E ו-D אני רוצה להבין איפה ,CF הוא אמצע קשת S הוא חיצוני .בנוסף אם אנחנו ,E ועבור Ω עם AB תלוי איפה נקודת החיתוך השנייה של D לא עוברים במרכז המעגל החסום מבפנים .איפה וקל לעבור על .BS-על ישר ,לכן זה תלוי איפה נקודת ההשקה ביחס ל S ו-E ,יודעים שנקודת ההשקה בין המעגלים צריך לבחור את המעגל BC-באותו צד ביחס ל Ω עם AB ונקודת החיתוך השנייה של F-מקרים לראות שכש התחתון ,אחרת את העליון .ובהוכחה שלנו התמונה סימטרית במקרה הבודד ואנו בוחרים באמת את המעגל התחתון ולכן היא עובדת.*



<u>המשך סיפור! טענה מגניבה .</u>

נסמן ב-X את נקודת החיתוך של EF עם KN. באופן דומה נגדיר את Y, Z. אז DX, EY, FZ נחתכים ב-F_e .



הוכחה: כמו מקודם נבנה את המעגל BCH ומעגל ומעגל ω שמשיק ל-AB, AC ו-BCH (מבפנים), נקודות ההשקה המתאימות יסומנו U, V, T בהתאמה. נסמן ב-P את נקודת החיתוך של UV עם BC.

טענה: TP חותך את BCH באמצע קשת BC.

הוכחת הטענה: נסמן את נקודות החיתוך של TB, TC עם ω ב-Q, R. מנלאוס במשולש ABC עם הישר UPV אומר ש-

$$\frac{CV}{BU} = \frac{CP}{BP}$$

אבל

$$\left(\frac{CV}{BU}\right)^2 = \frac{CR \cdot CT}{BQ \cdot BT} = \left(\frac{CT}{BT}\right)^2$$

ולכן $\frac{CP}{BP} = \frac{CT}{BT}$ ולכן TP חוצה זווית של $\angle BTC$.*סיום מהטענה: נבצעה הומוטתיה מ-A עם מקדם חצי. בהומוטתיה זו L עובר ל-D (הרי ברור שהמשיק ב-L אופקי), UV עובר ל-EF, BC עובר ל-KN ולכן P עובר ב-X. חוץ מזה T עובר ל-F_e ולכן הישר TPL עובר לישר F_eXD. מש"ל .*